

ĆWICZENIE 1.

POMIAR PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO.

Cel ćwiczenia: Analiza ruchu drgającego harmonicznego. Pomiar przyspieszenia ziemskiego.

Część teoretyczna: Prawo powszechnego ciążenia, ciężar ciała a masa ciała, przyspieszenie grawitacyjne, ruch ciała w polu grawitacyjnym, ruch harmoniczny ciała drgającego, wahadło matematyczne.

Aparatura: Wahadło, stoper, fotokomórka, przystawka rejestrująca Cobra, przymiar milimetrový, multimetr cyfrowy, siłomierz elektroniczny, spadkownica.

Wstęp.

Newton zauważył, że ciała przy powierzchni Ziemi (znajdujące się w odległości R_Z od środka Ziemi) spadają swobodnie z przyspieszeniem g a jednocześnie przyspieszenie dośrodkowe Księżyca, znajdującego się w odległości około $60R_Z$, jest około 602 razy mniejsze niż g . Wyjaśnił to zakładając, że pomiędzy dowolnymi dwoma ciałami istnieje siła, której wartość jest proporcjonalna do iloczynu mas tych ciał, podzielonego przez kwadrat odległości między ich środkami:

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

Przyspieszenie swobodnie spadających ciał przy powierzchni Ziemi wynosi około $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Siła, która jest źródłem tego przyspieszenia, nazywana jest siłą ciężkości lub potocznie ciężarem ciała. Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona ma ona wartość $F = mg$. Siła ta występuje niezależnie od tego, czy ciało spada swobodnie, czy nie. Ciężar jest to siła grawitacji działająca pomiędzy ciałem o masie m a Ziemią. Podstawiając mg w miejsce wartości siły ciężkości F w prawie powszechnego ciążenia, otrzymujemy równanie:

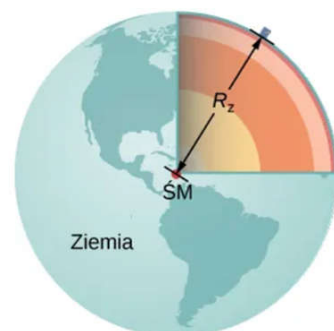
$$mg = G \frac{mM}{r^2}$$

zatem

$$g = G \frac{M_Z}{r^2}$$

gdzie r jest odległością między środkiem masy Ziemi i danego ciała. Średni promień Ziemi wynosi około $R_Z = 6370 \text{ km}$, masa Ziemi $M_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$. W związku z tym dla ciał znajdujących się nawet kilka kilometrów nad powierzchnią Ziemi możemy przyjąć $r = R_Z$.

Warto również zauważyć, że Ziemia nie jest idealną kulą. Jej wnętrze jest częściowo ciekłe, a to zwiększa „wybrzuszenie” Ziemi na równiku z powodu ruchu wirowego. Promień Ziemi jest około 30km większy w kierunku równika w porównaniu z kierunkiem do biegunów. Wspomniany ruch obrotowy Ziemi ma prędkość kątową $\omega = 0,0000727 \text{ rad/s}$. Wszystko to sprawia że przyspieszenie ziemskie różni się w zależności od szerokości geograficznej.



Wybrane wartości przyspieszenia ziemskiego:

biegun – $9,83332 \text{ m/s}^2$

równik – $9,78030 \text{ m/s}^2$

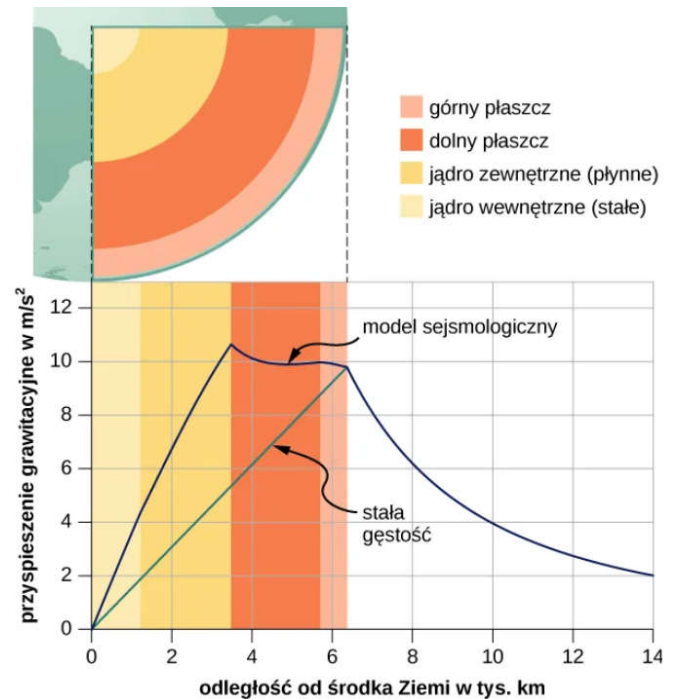
Gdańsk – $9,8145 \text{ m/s}^2$

Kraków – $9,8105 \text{ m/s}^2$

Zakładając stałą gęstość d naszej planety oraz że jest ona kulą o objętości $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, wartość przyspieszenia grawitacyjnego g (w związku z tym także twój ciężar), malałaby liniowo w miarę zbliżania się do środka Ziemi. Po dotarciu do jej środka byłbyś nieważki, ponieważ masa planety przyciągała by cię jednakowo we wszystkich kierunkach ku jej powierzchni.

W rzeczywistości gęstość Ziemi nie jest stała, podobnie jak i cała Ziemia nie jest ciałem stałym. Rysunek obok pokazuje zależność g wynikającą z prawa Gaussa, przy założeniu stałej gęstości Ziemi, oraz bardziej rzeczywistą zależność opartą na szacunkach gęstości Ziemi, pochodzących z danych sejsmicznych. Równanie g dla Ziemi o stałej gęstości przyjmuje postać:

$$g = G \frac{M_Z}{R_Z^2} = G \frac{d \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3} G d \pi r$$



Prawo powszechnego ciążenia wyjaśnia wiele faktów obserwacyjnych, które dostrzeżliśmy w naszym Układzie Słonecznym. Rzeczywiście, same prawa Newtona wystarczyły, aby precyzyjnie wysłać każdy pojazd kosmiczny w podróż. Tory asteroid przecinających orbitę Ziemi i większości innych ciał niebieskich mogą być także dokładnie określone przy użyciu jedynie praw Newtona. Niemniej jednak, wiele zjawisk wykazało rozbieżność od tego, co przewidują prawa Newtona. Są to m.in. precesja orbity Merkurego i sposób, w jaki grawitacja oddziałuje ze światłem. W takich sytuacjach niezbędna jest teoria grawitacji Einsteina.

Przykładowe obliczenia przyspieszenia grawitacyjnego planet:

- Merkury:

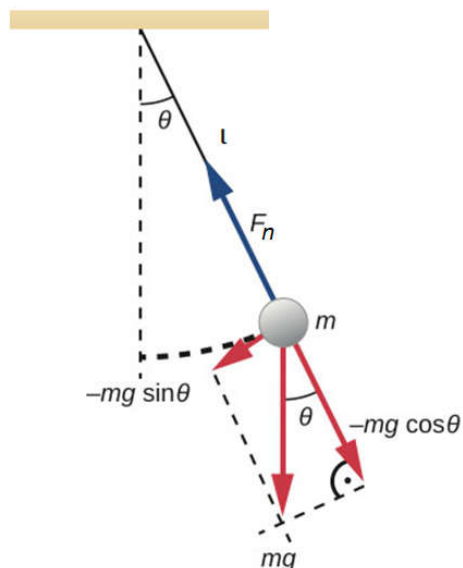
$$a_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{3,3 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2439 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Wenus:

$$a_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{48,7 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(6052 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jednym ze sposobów pomiaru przyspieszenia ziemskiego jest wykorzystanie wahadła matematycznego. Wahadło matematyczne jest zdefiniowane jako punkt materialny poruszający się po łuku okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym (drgających harmonicznie) zawieszony na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości l . Bliskim przybliżeniem takiego wahadła jest ciężarek zawieszony na nierozciągliwej linie której masa jest znacznie mniejsza niż masa ciężarka. Nieważkość nici oznacza, że jej masa jest zanedbywalnie mała w porównaniu do masy ciężarka.

Co powoduje ruch takiego wahadła? Nie jest to na pewno siła, którą wychylamy wahadło z położenia równowagi na samym początku doświadczenia. Siła ta bowiem jedynie inicjuje ruch i nie przyczynia się do jego kontynuacji. Okazuje się, że przyczyną utrzymania wahadła w ruchu jest siła ciężkości ściśle związana z przyspieszeniem g .



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Co ciekawe, okres ten nie zależy od masy ciężarka zawieszonego na nici. Pamiętajmy jednak, że ciężarek ten musi mieć małe rozmiary, gdyż opory powietrza, które mogłyby wpłynąć na ruch wahadła z ciałami o większych rozmiarach, zostały w powyższym równaniu pominięte.

Okres drgań wahadła matematycznego zależy więc wyłącznie od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego. Nie mają na niego wpływu ani masa ciężarka, ani amplituda maksymalnego kąta w zakresie do około $\theta = 15^\circ$. Dlatego też zegary mechaniczne wykorzystujące wahadło mogą precyzyjnie odmierzać czas. Warto podkreślić wpływ przyspieszenia g na okres. Jeżeli długość wahadła jest dokładnie znana, to można je zastosować do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego.

Powstaje pytanie, czy wzór ten obowiązuje zawsze, czy też w pewnych warunkach wahadło matematyczne może oscylovąć wolniej lub szybciej niż to wynika z powyższego wyrażenia.

Aby uzyskać odpowiedź, musisz pamiętać że wzór ten został sporządzony dla wahadła matematycznego zawieszonego w układzie inercyjnym pola grawitacyjnego, czyli w układzie, w którym nie pojawiają się pozorne siły bezwładności.

Zastanów się, co się wydarzy w sytuacji gdy układ zmienimy na nieinercjalny czyli układ odniesienia poruszający się ruchem zmiennym względem inercjalnego układu odniesienia np. ruszająca winda z przyspieszeniem $a < g$ w której znajduje się drgające wahadło matematyczne.

Część praktyczna.

Część I. Pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego.

1. Ustal dowolną długość wahadła z przedziału od 140 cm do 250 cm.
2. Zmierz taśmą mierniczą długość wahadła L , mierząc odległość do środka masy ciała.

Kąt $\alpha_1 \in < 4^\circ, 7^\circ >$, długość wahadła $L = \dots\dots\dots$ [m]						
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
10T						

3. Wychyl wahadło o kąt α_1 i zmierz za pomocą stopera czas trwania 10 pełnych wahanć.
4. Powtórz pomiar 6-krotnie zapisując dane w tabeli.
5. Wyznacz średnią wartość pomiaru okresu T (czasu jednego pełnego cyklu wahanć) oraz niepewność pomiaru $u(T)$.
6. Na podstawie pomiarów oblicz wartość przyspieszenia ziemskiego korzystając ze wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

oraz niepewności $u(g)$ korzystając z prawa przenoszenia niepewności.

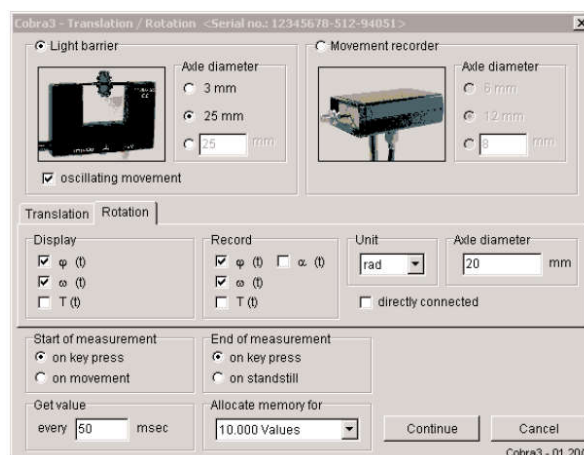
7. Powtórz pomiary zmieniając: kąt $\alpha_2 \approx 2\alpha_1$ oraz znacząco zmień długość wahadła.

Kąt $\alpha_2 \approx 2\alpha_1$, długość wahadła $L = \dots\dots\dots$ [m]						
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
10T						

8. Powtórz obliczenia z punktów 5-6.

Część II. Pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą fotokomórki (wahadło matematyczne).

1. Wykonaj pomiary okresu drgań wahadła za pomocą fotokomórki dla sześciu różnych długości L wahadła. W tym celu uruchom oprogramowanie „Measure – Translation/Rotation” i wykonaj pomiar prędkości drgającego ciała przechodzącego kilkakrotnie przez fotokomórkę. Okres odczytaj z zarejestrowanego przez przystawkę wykresu $v(t)$ w zakładce **Translation**.



2. Zapisz pomiary w tabeli:

pomiar	1	2	3	4	5	6
$l[m]$						
$T[s]$						

3. Za pomocą aplikacji Microsoft Office Excel (lub innej) narysuj wykres punktowy XY zależności $y(x)$, gdzie: $y = 4\pi^2 l$, $x = T^2$.

pomiar	1	2	3	4	5	6
$x = T^2 [s^2]$						
$y = 4\pi^2 l [m]$						

4. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznacz przyspieszenie ziemskie g oraz jego niepewność $u(g)$.

Cześć III. Pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą siłomierza elektronicznego.

a) Uruchom oprogramowanie „**Measure - Force**” i wykonaj osiem pomiarów siły ciężkości dla różnych mas, zmieniając je za pomocą regulowanego odważnika laboratoryjnego. Wykonując pojedynczy pomiar siły ciężkości ustaw częstotliwość probierza próby na 1pomiar/100ms. Po otrzymaniu dużej liczby wyników cząstkowych uśrednij wartość siły ciężkości. Ostateczną wartość siły podaj z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

b) Pomiary zapisz w tabeli:

pomiar	1	2	3	4	5	6	7	8
$m (kg)$	0,02							0,22
$F(N)$								

c) Za pomocą aplikacji Microsoft Office Excel (lub innej) narysuj punktowy wykres zależności ciężaru od masy $F(m)$.

$$F = mg$$

d) Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznacz przyspieszenie ziemskie g oraz jego niepewność $u(g)$.

Cześć IV. Pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą spadkownicy.

- a) Przygotuj licznik cyfrowy i starter, sprawdzając poprawność ich działania.
- b) Wykonaj cztery pomiary czasu spadku kulki z różnych wysokości. Uśrednione czasy spadku (na podstawie 2 lub 3 pomiarów) oraz pomiary wysokości zapisz w tabeli:

pomiar	1	2	3	4
$h[m]$				
$t[s]$				
$y = 2h[m]$				
$x = t^2[s^2]$				
$g = \frac{2h}{t^2} \left[\frac{m}{s^2} \right]$				

- c) Korzystając z metody najmniejszych kwadratów ($y = gx$) lub prawa przenoszenia niepewności pomiarowej wyznacz przyspieszenie ziemskie g oraz jego niepewność $u(g)$.

Przykładowe zadania na kolokwium.

1. Jaka jest wartość przyspieszenia grawitacyjnego w danym miejscu pomiarowym, jeśli wahadło o długości 75cm ma okres drgań 1,7357 s?
2. Oblicz jaką długość ma wahadło sekundowe?
3. Wiedząc, że masa Księżyca jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu jest 6 razy mniejsze niż na Ziemi, oblicz ile razy promień Księżyca jest mniejszy od promienia Ziemi?
4. Jak szybko Ziemia musiałaby wirować, aby wartość pozornej siły ciężkości działającej na ciała na równiku była równa zero? Jak długo trwałby wówczas dzień?
5. Ile wynosi wartość przyspieszenia g na wysokości 400 km ponad powierzchnią Ziemi, na której orbituje Międzynarodowa Stacja Kosmiczna?

Bibliografia:

Podręcznik online - Fizyka dla szkół wyższych. <https://cnx.org/>

Henryk Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 2003

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Podstawy fizyki, t. 1-5, PWN, Warszawa 2003.

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_pl.html