

ĆWICZENIE 2.

POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA SPRĘŻYSTOŚCI. ANALIZA DRGAŃ HARMONICZNYCH.

Cel ćwiczenia: Wyznaczanie zależności pomiędzy wydłużeniem sprężyny i siłą. Badanie okresu oscylacji ciężarka zawieszonego na sprężynie w funkcji masy obciążającej dla dwóch układów sprężyn.

Część teoretyczna: Prawa dynamiki Newtona, siła sprężystości, prawo Hooke'a, oscylacje harmoniczne, okres oscylacji. Analiza drgań harmoniczných.

Aparatura: Zestaw sprężyn, przymiar milimetrowy, zestaw obciążników.

Wstęp.

Robert Hooke sformułował w 1660 roku ogólne prawo opisujące własności sprężyste ciał stałych mówiące, że odkształcenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonego naprężenia. Prawo to jest spełnione dla małych odkształceń. Pod wpływem działających sił zewnętrznych każde ciało stałe odkształca się, zmieniając swoją objętość i kształt. W czasie, gdy ciało jest odkształcone, siły zewnętrzne są równoważone siłami reakcji sprężystych ciała, które dążą do przywrócenia jego pierwotnej postaci. W przypadku rozciąganej lub ściskanej sprężyny miarą odkształcenia jest jej wydłużenie x (dodatnie, gdy sprężyna jest rozciągana a ujemne, gdy jest ściskana). Ponieważ naprężenie jest proporcjonalne do działającej siły zewnętrznej F powodującej odkształcenie prawo Hooke'a dla sprężyny można zapisać w postaci:

$$F = kx$$

Współczynnik proporcjonalności k charakteryzuje własności sprężyste określonej sprężyny.

Pionowo wiszącą sprężynę można rozciągnąć zawieszając na jej dolnym końcu ciężarek o masie m . Rozważmy przypadek, gdy masa własna sprężyny jest pomijalnie mała w porównaniu z masą zawieszonego na niej ciężarka. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, sprężyna rozciągnięta ciężarkiem, działa na ciężarek siłą sprężystą F_s równą co do wartości sile rozciągającej sprężynę F , lecz przeciwnie do niej skierowaną.

$$F_s = -kx$$

Ciężarek będzie w równowadze w położeniu x , w którym siła sprężystości zrównoważy jego ciężar $F_c = mg$:

$$mg - kx = 0$$

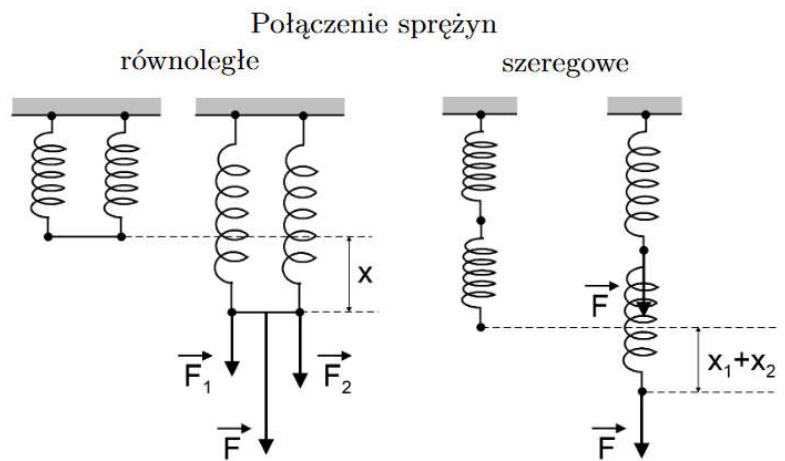
Jeśli sprężyna zostanie wydłużona tak, by wypadkowa ciężaru F_c i siły sprężystości F_s , działających na masę nie była równa zero, wówczas, ciężarek będzie poruszał się ruchem drgającym. Szczególnym przykładem ruchu drgającego jest ruch harmoniczny prosty omówiony na kolejnej stronie.

Przykładowe dane techniczne sprężyny w ofercie sprzedaży detalicznej (rys. obok).



Dane techniczne		Opis
		
Materiał		Stal nierdzewna
L - Długość (mm)		0.18
d - Średnica zewnętrzna (mm)		1.60
k - Stała sprężyny (N/mm)		0.15

Sprężyny można łączyć ze sobą równolegle lub szeregowo. Wypadkowy współczynnik sprężystości k połączonych sprężyn jest zdefiniowany zależnościami:



W przypadku połączenia równoległego dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2

$$k_{układu} = k_1 + k_2$$

W przypadku połączenia szeregowego dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2

$$\frac{1}{k_{układu}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Ruch harmoniczny prosty występuje wtedy, gdy siła działająca na ciało drgające jest proporcjonalna do wychylenia ciała od położenia równowagi i przeciwnie do niego skierowana. Równanie ruchu punktu o masie m , poddanego działaniu takiej siły, jest następujące:

$$ma = -kx$$

gdzie a jest przyspieszeniem masy m , x - jej wychyleniem od położenia równowagi, a k - współczynnikiem proporcjonalności. Jeśli uwzględnimy, że przyspieszenie a można wyrazić jako drugą pochodną współrzędnej

x po czasie t , otrzymamy równanie: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ którego rozwiązaniem jest funkcja $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

gdzie:

φ - faza początkowa ruchu;

A - amplituda drgań (maksymalne wychylenie ciała drgającego od położenia równowagi);

ω - częstość kołowa drgań, spełniająca zależność

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Okres drgań ciężarka zawieszonego na sprężynie zależy tylko od jego masy m i stałej k sprężyny, a nie zależy od początkowego odchylenia ciężarka od położenia równowagi.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

To, że okres drgań nie zależy od amplitudy A określane prawem izochronizmu wahadła sprężynowego.

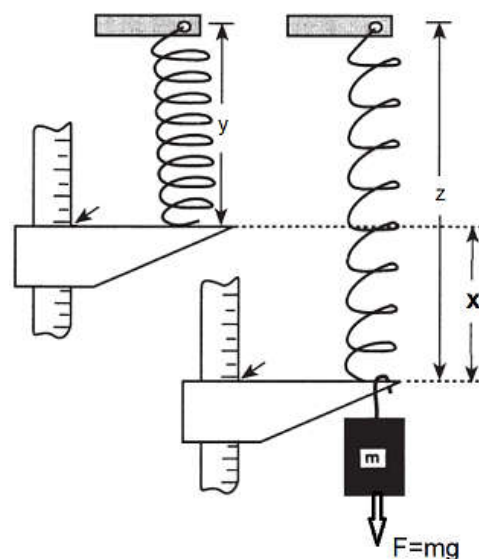
Z energetycznych rozważań o ruchu drgającym można wyprowadzić wzór uwzględniający fakt, że sprężyna ma swoją masę m_s . „Udoskonalony” wzór na okres drgań wahadła przyjmuje wtedy postać:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}}$$

Część praktyczna:

CZEŚĆ I. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA SPRĘŻYSTOŚCI Z ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY WYDŁUŻENIEM SPRĘŻYNY I SIŁĄ SPRĘŻYSTOŚCI.

1. Dla swobodnie wiszącej na statywie sprężyny odczytaj, za pomocą skali milimetrowej, położenie y dolnego końca sprężyny.
2. Dla sprężyny obciążonej masą m odczytaj na skali położenie tego samego końca z . Różnicę $x = z - y$ zapisz w tabeli. Wyznacz ciężar F_i przyjmując przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ N/kg}$.
3. Pomiar powtórz dla innych dowolnych obciążeń m **w zakresie bezpiecznym dla sprężyny**. Wyniki zapisz w tabeli:



<i>pomiar i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_i \text{ (kg)}$	0,02							
$F_i \text{ (N)}$	0,1962							
$x_i \text{ (m)}$								

4. Pomiary powtórz dla drugiej sprężyny.

<i>pomiar i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_i \text{ (kg)}$	0,02							
$F_i \text{ (N)}$	0,1962							
$x_i \text{ (m)}$								

5. Pomiary powtórz dla szeregowego układu sprężyn.

<i>pomiar i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_i \text{ (kg)}$	0,02							
$F_i \text{ (N)}$	0,1962							
$x_i \text{ (m)}$								

6. Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów z zależności liniowych $F(x)$ wyznacz współczynniki sprężystości sprężyn k oraz niepewności $u(k)$.

CZEŚĆ II. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA SPRĘŻYSTOŚCI. BADANIE OKRESU OSCYLACJI CIĘŻARKA ZAWIESZONEGO NA SPRĘŻYNIE W FUNKCJI MASY.

1. Pierwszą z badanych sprężyn, obciąż wybranym odważnikiem m i wprowadź układ do pionowych drgań. Dokonaj pomiaru **stoperem** czasu t trwania 10 kolejnych oscylacji. Pamiętaj, że pojedynczy cykl oscylacji (okres T), to czasu jednego drgania np.: czas pomiędzy dwoma kolejnymi najniższymi położeniami.
2. Pomiary powtórz dla kolejnych obciążeń m **w zakresie bezpiecznym dla sprężyny**. Wyniki zapisz w tabeli:

<i>pomiar i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i (kg)								
t_i (s)								
$T_i = \frac{t_i}{10}$ (s)								
$(T_i)^2$ (s ²)								

3. W ramach opracowania wyników sporządź na podstawie otrzymanych pomiarów wykresy zależności $y(x)$ gdzie $y = 4\pi^2 m$, $x = T^2$.

<i>pomiar i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i = (T_i)^2$ (s ²)								
$y_i = 4\pi^2 m_i$ (kg)								

4. Wykorzystując algorytm obliczeniowy regresji liniowej (metody najmniejszych kwadratów) wyznacz współczynnik sprężystości sprężyny k .
5. Powtórz pomiar dla drugiej sprężyny.

Przykładowe zadania na kolokwium.

1. Mechaniczny zegar odmierza czas na podstawie drgań masy na sprężynie. Masa ta może być ozdobną figurką. Oblicz jak należy dobrać współczynnik sprężystości, aby uzyskać okres 0,5s dla masy 15g?
2. Masa 0,5 kg zawieszona na sprężynie wykonuje drgania z okresem 1,5s. O ile musimy zwiększyć masę drgającego ciała, aby uzyskać okres drgań równy 2s?
3. Paczkę zawieszono na wadze sprężynowej. Oblicz współczynnik sprężystości wagi, jeśli przy masie paczki równej 10kg sprężyna rozciąga się o 8cm? Ile waży paczka, która rozciąga sprężynę o 5,5cm?
4. Ciężarek o masie $m = 20dag$ zawieszono na dwóch identycznych sprężynach połączonych równolegle rozciągając układ sprężyn o $x = 2cm$. Następnie ciężarek zawieszono na identycznych sprężynach połączonych tym razem szeregowo. Oblicz o ile centymetrów ciężarek rozciągnie ten układ sprężyn oraz współczynnik k pojedynczej sprężyny.

Bibliografia:

Podręcznik online - Fizyka dla szkół wyższych. <https://cnx.org/>

Henryk Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 2003

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Podstawy fizyki, t. 1-5, PWN, Warszawa 2003.