Zadanie 11. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.15) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zaokrąglony do zadanej liczby cyfr znaczących. XI.4) […] oblicza różnice energii między poziomami energetycznymi w atomie wodoru; XI.5) posługuje się pojęciem pędu fotonu; stosuje zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu do opisu emisji i absorpcji przez swobodne atomy; opisuje odrzut atomu emitującego kwant światła.

Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek ZZP

Zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania pędu układu atom – foton, np. zapisy równoważne poniższym:

$$p_{at} - p_{f\,62} = 0$$

Warunek ENERGIE_PEDY

Wyrażenie energii kinetycznej atomu poprzez pęd atomu (bezpośrednio albo pośrednio poprzez prędkość i związek prędkości z pędem) **oraz** wyrażenie energii fotonu za pomocą pędu fotonu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(E_{kin\,at} = \frac{p_{at}^2}{2m_{at}} \text{ albo } \left(E_{kin\,at} = \frac{1}{2}mv_{at}^2 \text{ oraz } p_{at} = mv_{at}\right)\right) \text{ oraz } E_{f\,62} = p_{f\,62}c$$

Warunek E62

Zapisanie/wykorzystanie zasady zachowania energii układu atom – foton podczas emisji fotonu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_6 - E_2 = E_{f\,62}$$

Warunek E62_wzory

Zapisanie wzoru na energię emitowanego fotonu wynikającego z zasady zachowania energii układu atom – foton podczas emisji fotonu **oraz** wykorzystanie wzorów na energie atomu wodoru w n-tym stanie energetycznym i podstawienie wartości liczbowych do wzoru na energię fotonu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{f\,62} = \left(\frac{-13{,}606\ \text{eV}}{6^2} - \frac{-13{,}606\ \text{eV}}{2^2}\right)$$

Warunek ILORAZ_ENERGII_WZÓR
Spełnienie warunków: **ZZP oraz ENERGIE_PEDY, oraz E62, oraz** wyprowadzenie i zapisanie wzoru – wyrażonego w funkcji masy atomu i stanów energetycznych atomu – na iloraz energii kinetycznej odrzutu atomu i energii emitowanego fotonu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\textbf{ZZP oraz ENERGIE_PEDY oraz E62} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{E_6 - E_2}{2m_{at}c^2}$$

Schemat punktowania
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu energii kinetycznej odrzutu atomu i energii emitowanego fotonu **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego zaokrąglonego do dwóch cyfr znaczących i zapisanego w notacji wykładniczej:

metoda $\rightarrow \quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$

3 pkt – spełnienie warunku **ILORAZ_ENERGII_WZÓR**
LUB
– spełnienie warunków: **ZZP oraz ENERGIE_PEDY oraz E62_wzory**

2 pkt – spełnienie warunków: **ZZP oraz ENERGIE_PEDY**
LUB
– spełnienie warunków: **ZZP oraz E62**
LUB
– spełnienie warunków: **ENERGIE_PEDY oraz E62**
LUB
– spełnienie warunku **E62_wzory**

1 pkt – spełnienie warunku **ZZP**
LUB
– spełnienie warunku **ENERGIE_PEDY**
LUB
– spełnienie warunku **E62**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1a). (z wykorzystaniem faktu, że $E_{kin\,at} \ll E_{f\,62}$)
Zastosujemy zasadę zachowania pędu: pęd układu atom – foton jest taki sam przed emisją i po emisji fotonu i ponadto wynosi zero. To oznacza, że po emisji atom i foton poruszają się w przeciwne strony i mają te same wartości pędu. Zgodnie z oznaczeniami w zadaniu mamy:

$$1a) \quad p_{at} - p_{f\,62} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1b) \quad p_{at} = p_{f\,62}$$

Energię kinetyczną atomu i energię fotonu wyrazimy za pomocą ich pędów:

$$2) \quad E_{kin\,at} = \frac{p_{at}^2}{2m_{at}} \qquad\qquad 3) \quad E_{f\,62} = p_{f\,62}c$$

Z równań 2), 3) i 1b) wynika:

$$4) \quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{\frac{p_{at}^2}{2m_{at}}}{p_{f\,62}c} = \frac{p_{f\,62}}{2m_{at}c} = \frac{E_{f\,62}}{2m_{at}c^2}$$

Obliczymy energię emitowanego fotonu. Zastosujemy zasadę zachowania energii: energia całkowita układu atom – foton jest taka sama przed emisją i po emisji fotonu. Energię atomu wodoru w n-tym stanie energetycznym oznaczymy jako E_n. Zatem:

$$5)\quad E_6 + m_{at}c^2 = E_2 + m_{at}c^2 + E_{kin\,at} + E_{f\,62} \quad \rightarrow$$

$$5a)\quad E_6 - E_2 = E_{kin\,at} + E_{f\,62} \quad \rightarrow$$

Wiemy, że w zjawisku emisji fotonu z atomu wodoru foton unosi prawie całą energię, która wydziela się podczas przejścia elektronu na niższe stany energetyczne. Zatem w równaniu 5a) pominiemy energię kinetyczną atomu (zgodnie ze wskazówką w zadaniu):

$$5b)\quad E_6 - E_2 = E_{f\,62}$$

Wynik podstawimy do równania 4)

$$6)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{E_6 - E_2}{2m_{at}c^2}$$

Obliczymy wartość liczbową z jednostką różnicy $E_6 - E_2$:

$$7)\quad E_6 - E_2 = -13{,}606\ \text{eV} \cdot \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{2^2}\right) \approx 3{,}0236\ \text{eV} \approx 4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Obliczymy wartość liczbową z jednostką energii spoczynkowej atomu $m_{at}c^2$:

$$8)\quad m_{at}c^2 = 1{,}6735 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2 \approx\ 1{,}5040 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Wartości otrzymane w 7) i 8) podstawimy do 6):

$$9)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{2 \cdot 1{,}5040 \cdot 10^{-10}\ \text{J}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$$

Sposób 1b). (bez założenia, że $E_{kin\,at} \ll E_{f\,62}$)

Uwaga! To rozwiązanie podajemy w celach dydaktycznych do analizy na zajęciach. Rekomendujemy je jako dowód własności, że foton unosi prawie całą energię, która wydziela się podczas przejścia elektronu na niższy stan energetyczny atomu wodoru.

Zastosujemy zasadę zachowania pędu: pęd układu atom – foton jest taki sam przed emisją i po emisji fotonu i ponadto wynosi zero. To oznacza, że po emisji atom i foton poruszają się w przeciwne strony i mają te same wartości pędu. Zgodnie z oznaczeniami w zadaniu mamy:

$$1a)\quad p_{at} - p_{f\,62} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1b)\quad p_{at} = p_{f\,62}$$

Energię kinetyczną atomu i energię fotonu wyrazimy za pomocą ich pędów:

$$2)\quad E_{kin\,at} = \frac{p_{at}^2}{2m_{at}} \qquad\qquad 3)\quad E_{f\,62} = p_{f\,62}c$$

Z równań 2), 3) i 1b) wynika:

$$4)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{\frac{p_{at}^2}{2m_{at}}}{p_{f\,62}c} = \frac{p_{f\,62}}{2m_{at}c} = \frac{E_{f\,62}}{2m_{at}c^2}$$

Obliczymy energię fotonu. Zastosujemy zasadę zachowania energii: energia całkowita układu atom – foton jest taka sama przed emisją i po emisji fotonu. Energię atomu wodoru w n-tym stanie energetycznym oznaczymy jako E_n. Zatem:

$$5)\quad E_6 + m_{at}c^2 = E_2 + m_{at}c^2 + E_{kin\,at} + E_{f\,62} \quad \rightarrow$$

$$5a)\quad E_6 - E_2 = E_{kin\,at} + E_{f\,62} \quad \rightarrow$$

W powyższym równaniu uwzględnimy równanie 4):

Uwaga! Zauważ, że w tej metodzie nie pomijamy $E_{kin\,at}$ w obliczeniach energii fotonu.

$$5b)\quad E_6 - E_2 = \frac{E_{f\,62}^2}{2m_{at}c^2} + E_{f\,62} \quad \Leftrightarrow \quad E_{f\,62}^2 + 2m_{at}c^2 \cdot E_{f\,62} - 2m_{at}c^2 \cdot (E_6 - E_2) = 0$$

Rozwiążemy równanie kwadratowe względem $E_{f\,62}$. Wybierzemy rozwiązanie dodatnie, ponieważ energia fotonu jest dodatnia:

$$6)\quad E_{f\,62} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2m_{at}c^2 + \sqrt{(2m_{at}c^2)^2 + 4 \cdot 2m_{at}c^2 \cdot (E_6 - E_2)}}{2} \quad \rightarrow$$

$$6a)\quad E_{f\,62} = \sqrt{(m_{at}c^2)^2 + 2m_{at}c^2 \cdot (E_6 - E_2)} - m_{at}c^2 \quad \rightarrow$$

$$6b)\quad E_{f\,62} = m_{at}c^2 \sqrt{1 + \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2}} - m_{at}c^2 = m_{at}c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2}} - 1 \right)$$

Otrzymany wynik wstawimy do równania 4). Po przekształceniu otrzymujemy:

$$7)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2}} - 1 \right)}{2}$$

Sposób A kontynuowania obliczeń od równania 7):

Obliczymy wartość liczbową z jednostką różnicy $E_6 - E_2$:

$$8)\quad E_6 - E_2 = -13{,}606\ \text{eV} \cdot \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 3{,}0236\ \text{eV} \approx 4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Obliczymy wartość liczbową z jednostką energii spoczynkowej atomu $m_{at}c^2$:

$$9)\quad m_{at}c^2 = 1{,}6735 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2 \approx\ 1{,}5040 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Wartości otrzymane w 8) i 9) podstawimy do 7). Do obliczeń użyjemy kalkulatora naukowego:

$$10)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4{,}8443 \cdot 10^{-19}}{1{,}5040 \cdot 10^{-10}}} - 1 \right)}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$$

Sposób B kontynuowania obliczeń od równania 7):

Skorzystamy z przybliżenia funkcji $f(x) = \sqrt{1 + x}$ dla $x \ll 1$: $f(x) = \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

Zauważmy (po analizie rzędów wielkości), że:

$$8)\quad \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2} \ll 1$$

Zatem możemy zastosować wspomniane powyżej przybliżenie:

$$9)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2}} - 1\right)}{2} \approx \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2(E_6 - E_2)}{m_{at}c^2} - 1\right)}{2} = \frac{(E_6 - E_2)}{2m_{at}c^2}$$

Obliczymy wartość liczbową z jednostką różnicy $E_6 - E_2$:

$$10)\quad E_6 - E_2 = -13{,}606\ \text{eV} \cdot \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{2^2}\right) \approx 3{,}0236\ \text{eV} \approx 4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Obliczymy wartość liczbową z jednostką energii spoczynkowej atomu $m_{at}c^2$:

$$11)\quad m_{at}c^2 = 1{,}6735 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2 \approx\ 1{,}5040 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Wartości otrzymane w 10) i 11) podstawimy do 9).

$$12)\quad \frac{E_{kin\,at}}{E_{f\,62}} = \frac{4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{2 \cdot 1{,}5040 \cdot 10^{-10}\ \text{J}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$$

Sposób 2.

Obliczymy energię emitowanego fotonu. Zastosujemy zasadę zachowania energii: różnica energii całkowitych układu atom – foton przed emisją i po emisji fotonu jest równa energii wydzielonej podczas emisji. Energię atomu wodoru w n-tym stanie energetycznym oznaczymy jako E_n. Uwzględnimy fakt, że foton unosi praktycznie całą energię wydzieloną podczas przejścia elektronu na niższy stan energetyczny:

$$1)\quad E_{f\,62} = E_6 - E_2$$

Wykorzystamy wzory na energie n-tego stanu atomu wodoru

$$2)\quad E_{f\,62} = \left(\frac{-13{,}606\ \text{eV}}{6^2} - \frac{-13{,}606\ \text{eV}}{2^2}\right) \approx 3{,}0236\ \text{eV} \approx 4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Obliczymy energię kinetyczną, jaką uzyskał atom wodoru w wyniku odrzutu:

$$3)\quad E_{kin\,at} = \frac{m_{at}v_{at}^2}{2} = \frac{p_{at}^2}{2m_{at}}$$

gdzie p_{at} jest wartością pędu atomu wodoru. Zatem pozostaje wyznaczyć pęd atomu. Zastosujemy zasadę zachowania pędu: pęd układu atom – foton jest taki sam przed emisją i po emisji fotonu i ponadto wynosi zero. To oznacza, że po emisji atom i foton poruszają się w przeciwne strony i mają te same wartości pędu. Zgodnie z oznaczeniami w zadaniu mamy:

$$4a)\quad p_{at} - p_{f\,62} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 4b)\quad p_{at} = p_{f\,62}$$

W równaniu 4b) zastosujemy związek $E_f = p_f c$ między pędem fotonu a jego energią:

$$5a)\quad p_{at} = p_{f\,62} = \frac{E_{f\,62}}{c} \quad \rightarrow$$

$$5b)\quad p_{at} = \frac{4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}6159 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Otrzymany wynik podstawimy do równania 3):

$$6)\quad E_{kin\ at} = \frac{\left(1{,}6159 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 1{,}6735 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} \approx 7{,}8014 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{J}$$

Zatem szukany iloraz energii wynosi

$$12)\quad \frac{E_{kin\ at}}{E_{f\ 62}} = \frac{7{,}8014 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{J}}{4{,}8443 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$$