Zadanie 12.1. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 1.2) (P) opisuje zależności między siłą dośrodkową a masą, prędkością liniową i promieniem oraz wskazuje przykłady sił pełniących rolę siły dośrodkowej; 4.1) wykorzystuje prawo powszechnego ciążenia do obliczenia siły oddziaływań grawitacyjnych między masami punktowymi i sferycznie symetrycznymi; 4.7) oblicza okres ruchu satelitów (bez napędu) wokół Ziemi.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia masy pulsara (np. jak w krokach 1.–3.) oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką.

2 pkt – doprowadzenie do jednego wyrażenia, z którego można bezpośrednio obliczyć masę pulsara jedynie na podstawie stałych oraz parametrów ruchu orbitalnego planety (np. zapisanie wyrażenia jak w kroku 2.).

1 pkt – zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, z uwzględnieniem wzorów na te siły (np. jak w kroku 1. w sposobie 1.)

LUB

– skorzystanie ze wzoru na prędkość orbitalną, łącznie z zastosowaniem wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu (np. jak w kroku 1. w sposobie 2.).

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga dodatkowa

Jeżeli zdający zapisze od razu bez wyprowadzenia III prawo Keplera łącznie z poprawnie określoną stałą: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ i poprawnie zidentyfikuje wielkości w tym wzorze, to otrzymuje 2 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1.

Krok 1. Zapiszemy równanie identyfikujące siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, łącznie z uwzględnieniem wzorów na te siły:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

Krok 2. Wyprowadzimy wyrażenie pozwalające na bezpośrednie obliczenie masy pulsara z parametrów ruchu orbitalnego planety. W tym celu do powyższego równania podstawimy wzór na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu: $v = \frac{2\pi r}{T}$.

$$m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}$$

Do otrzymanego wyrażenia podstawiamy parametry ruchu orbitalnego planety:

$$M = \frac{4\cdot(3{,}142)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}}\cdot\frac{(0{,}19\ \mathrm{au})^3}{(25{,}3\ \mathrm{doby})^2}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia, przy czym jednostkę astronomiczną wyrazimy w metrach, a dobę wyrazimy sekundach.

$$M = \frac{4\cdot(3{,}142)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}}\cdot\frac{(0{,}19\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{(2{,}53\cdot 10^1\cdot 2{,}4\cdot 10^1\cdot 3{,}6\cdot 10^3\ \mathrm{s})^2} \approx 2{,}86\cdot 10^{-4}\cdot 10^{34}\ \mathrm{kg}$$

$$M \approx 2{,}86\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

Sposób 2.

Krok 1. Skorzystamy ze wzoru na prędkość w ruchu po orbicie kołowej oraz zastosujemy wzór na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Krok 2. Z powyższych równań wyprowadzamy wzór pozwalający na obliczenie masy pulsara z parametrów ruchu orbitalnego planety:

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \qquad \rightarrow \qquad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia (patrz krok 3. w sposobie 1.).

Zadanie 12.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Analiza tekstów popularnonaukowych i ocena ich treści. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 2.2) rozróżnia pojęcia: masa i moment bezwładności; 2.6) opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi przechodzącej przez środek masy (prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe); 2.8) stosuje zasadę zachowania momentu pędu do analizy ruchu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia częstotliwości obrotu gwiazdy przy promieniu $10R$ oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką.

1 pkt – skorzystanie z zasady zachowania momentu pędu, łącznie z zastosowaniem wzoru na moment pędu bryły sztywnej względem jej osi obrotu dla dwóch sytuacji: gdy jądro miało promień $10R$ oraz gdy jądro ma obecny promień R (np. zapis: $I_{10}\omega_{10} = I_1\omega_1$).

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie

Skorzystamy z zasady zachowania momentu pędu bryły sztywnej. Oznaczymy jako L_{10} moment pędu jądra gwiazdy, gdy miała promień 10 razy większy niż obecnie, natomiast jako L_1 oznaczymy moment pędu jądra gwiazdy przy obecnym promieniu *R*:

$$L_{10} = L_1 \quad \text{gdzie:} \quad L_{10} = I_{10}\omega_{10} \qquad L_1 = I_1\omega_1$$

$$I_{10}\omega_{10} = I_1\omega_1$$

Podstawiamy wzory na moment bezwładności I gwiazdy oraz na jej prędkość kątową:

$$kM(10R)^2 \cdot 2\pi f_{10} = kMR^2 \cdot 2\pi f_1 \quad \rightarrow$$

$$100R^2 f_{10} = R^2 f_1 \quad \rightarrow$$

$$f_{10} = \frac{f_1}{100} \qquad \rightarrow \qquad f_{10} = \frac{160\ \text{Hz}}{100} = 1{,}6\ \text{Hz}$$

Zadanie 12.3. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Analiza tekstów popularnonaukowych i ocena ich treści. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 2.9) uwzględnia energię kinetyczną ruchu obrotowego w bilansie energii; 2.8) stosuje zasadę zachowania momentu pędu do analizy ruchu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia stosunku energii kinetycznych oraz prawidłowy wynik liczbowy.

1 pkt – wykorzystanie wzoru na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej dla dwóch opisanych sytuacji, łącznie z zastosowaniem zasady zachowania momentu pędu bryły sztywnej (np. zapis energii kinetycznych w postaci $E_{kin1} = \frac{L^2}{2I_1}$, $E_{kin10} = \frac{L^2}{2I_{10}}$ lub równoważnie $E_{kin1} = \frac{1}{2}L\omega_1$, $E_{kin10} = \frac{1}{2}L\omega_{10}$ – np. jak w sposobach 1. i 2.)

LUB

– wykorzystanie wzoru na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej dla dwóch opisanych sytuacji, łącznie z zastosowaniem relacji pomiędzy częstotliwościami f_1 i f_{10} (lub okresami) oraz pomiędzy promieniami R_1 i R_{10}: (np. jak w sposobie 3.).

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga dodatkowa

Jeżeli zdający poprawnie wyprowadzi zależność $\frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{I_{10}}{I_1}$ lub $\frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{\omega_1}{\omega_{10}}$ i nie zapisze końcowego wyniku liczbowego (lub poda błędny wynik końcowy) to otrzymuje 1 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1.

Wykorzystamy wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej w postaci z momentem pędu L i momentem bezwładności I:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{oraz} \quad L = I\omega \qquad \rightarrow \qquad E_{kin} = \frac{L^2}{2I}$$

Zapiszemy stosunek energii kinetycznych ruchu obrotowego jądra gwiazdy (z dwóch opisanych sytuacji), z wykorzystaniem zasady zachowania momentu pędu:

$$\frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{\frac{L_1^2}{2I_1}}{\frac{L_{10}^2}{2I_{10}}} \quad \text{oraz} \quad L_1 = L_{10} \qquad \rightarrow \qquad \frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{I_{10}}{I_1} = \frac{(10R)^2}{R^2} = 100$$

Sposób 2.

Wykorzystamy wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej w postaci z momentem pędu i prędkością kątową:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{oraz} \quad L = I\omega \quad \rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2}L\omega$$

Zapiszemy stosunek energii kinetycznych ruchu obrotowego jądra gwiazdy (z dwóch opisanych sytuacji), z wykorzystaniem zasady zachowania momentu pędu i wyznaczonego ilorazu prędkości kątowych:

$$\frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{\frac{1}{2}L_1\omega_1}{\frac{1}{2}L_{10}\omega_{10}} \quad \text{oraz} \quad L_1 = L_{10} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{\omega_1}{\omega_{10}} = 100$$

Sposób 3. Zastosujemy wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej, łącznie z wykorzystaniem relacji pomiędzy częstotliwościami f_1 i f_{10} oraz promieniami R_1 i R_{10}:

$$E_{kin1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \qquad E_{kin10} = \frac{1}{2}I_{10}\omega_{10}^2 \qquad \frac{R_{10}}{R_1} = 10 \qquad \frac{f_{10}}{f_1} = \frac{1}{100}$$

Zapiszemy i obliczymy stosunek energii kinetycznych:

$$\frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{\frac{1}{2}kMR^2(2\pi f_1)^2}{\frac{1}{2}kM(10R)^2(2\pi f_{10})^2} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{kin1}}{E_{kin10}} = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{f_1}{f_{10}}\right)^2 = \frac{1}{100} \cdot 100^2 = 100$$