Zadanie 16.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	7.1) Zdający wykorzystuje prawo Coulomba […]. 1.8) Zdający wyjaśnia ruch ciał na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona. 1.9) Zdający stosuje trzecią zasadę dynamiki Newtona do opisu zachowania się ciał.

Schemat punktowania
1 p. – poprawne wszystkie zaznaczenia.
0 p. – brak spełnienia powyższego kryterium.

Poprawna odpowiedź
1. **P** 2. **P** 3. **P**

Zadanie 16.2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie. IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	1.10) Zdający wykorzystuje zasadę zachowania pędu […]. 3.2) Zdający oblicza wartość energii kinetycznej […]. 3.1) (P) Zdający posługuje się pojęciami pierwiastek, jądro atomowe, izotop […] podaje skład jądra atomowego na podstawie liczby masowej i atomowej. 3.5) (P) Zdający opisuje reakcje jądrowe, stosując zasadę zachowania liczby nukleonów […].

Schemat punktowania
2 p. – prawidłowa metoda i prawidłowa wartość stosunku energii kinetycznych jąder.
1 p. – prawidłowe wyprowadzenie wzoru wyrażającego stosunek energii kinetycznych przez odwrotny stosunek mas oraz błędny wynik albo brak wyniku końcowego
lub
– zapisanie stosunku energii kinetycznych oraz prawidłowa identyfikacja stosunku mas jąder atomowych
lub
– zapisanie zasady zachowania pędu łącznie z prawidłową identyfikacją mas obu jąder, na przykład zapisy równoważne: $220v_{Rn} = 4v_{He}$.
0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie
Korzystamy z zasady zachowania pędu całkowitego dla układu ciał, którym jest jądro atomowe przed rozpadem i po rozpadzie. Przyjmujemy układ odniesienia, w którym jądro ^{224}Ra spoczywa. Pęd początkowy jądra ^{224}Ra wynosi zero ($\vec{p}_{Ra} = 0$), dlatego suma pędów produktów rozpadu tego jądra też wynosi zero:

$$\vec{p}_{Ra} = \vec{p}_{Rn,He} \quad \rightarrow \quad 0 = m_{Rn}v_{Rn} - m_{He}v_{He} \quad \rightarrow \quad m_{Rn}v_{Rn} = m_{He}v_{He}$$

Stosunek energii kinetycznych jądra helu i radonu wyrazimy poprzez odwrotny stosunek mas tych jąder, przy wykorzystaniu zasady zachowania pędu:

$$\frac{E_{kin\,He}}{E_{kin\,Rn}} = \frac{m_{He}v_{He}^2}{m_{Rn}v_{Rn}^2} = \frac{m_{He}m_{Rn}^2}{m_{Rn}m_{He}^2} = \frac{m_{Rn}}{m_{He}} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{kin\,He}}{E_{kin\,Rn}} = \frac{m_{Rn}}{m_{He}}$$

albo

$$\frac{E_{kin\,He}}{E_{kin\,Rn}} = \frac{\frac{p_{He}^2}{2m_{He}}}{\frac{p_{Rn}^2}{2m_{Rn}}} = \frac{m_{Rn}}{m_{He}}\,.$$

Zatem

$$\frac{E_{kin\,He}}{E_{kin\,Rn}} \approx \frac{220\text{ u}}{4\text{ u}} \approx 55.$$

Zadanie 16.3. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk. I. Znajomość i umiejętność wykorzystania pojęć i praw fizyki do wyjaśniania procesów i zjawisk w przyrodzie.	3.4) (P) Zdający opisuje rozpad izotopu promieniotwórczego, posługując się pojęciem czasu połowicznego rozpadu; rysuje wykres zależności liczby jąder, które uległy rozpadowi od czasu […]. 12.4) Zdający interpoluje, ocenia orientacyjnie wartość pośrednią (interpolowaną) między danymi […] także za pomocą wykresu.

Schemat punktowania

2 p. – prawidłowa metoda i prawidłowy wynik mieszczący się w przedziale od 8 mg do 9 mg
lub
– prawidłowa metoda obliczenia obu krańców przedziału, do którego może należeć wynik, oraz stwierdzenie, że masa początkowa izotopu radu należy do przedziału $m_0 \in (6\text{ mg}; 12\text{ mg})$.

1 p. – wykorzystanie pojęcia czasu połowicznego rozpadu oraz zauważenie, że $3T < t < 4T$.

0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1

Zauważamy, że czas 13 dni stanowi 3,5 czasów połowicznego rozpadu:

$$\frac{t}{T} = \frac{13\text{ dni}}{3{,}7\text{ dni}} \approx 3{,}5$$

Korzystamy z pojęcia czasu połowicznego rozpadu lub równoważnie ze wzoru przedstawiającego zależność liczby jąder pozostających w próbce od czasu. Zamiast liczby jąder radu pozostających w próbce zapiszemy $m(t)$ – łączną masę jąder izotopu radu pozostających w próbce (m_0 oznacza początkową masę izotopu radu w próbce):

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \qquad \rightarrow \qquad m_0 = m(t) \cdot 2^{\frac{t}{T}}$$

Dla $t = 3{,}5T$ mamy:

$$m_0 = m(3{,}5T) \cdot 2^{3{,}5} = 0{,}75\text{ mg} \cdot 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 8{,}5\text{ mg}.$$

Początkowa masa izotopu radu wynosiła około 8,5 mg.

Sposób 2

Zauważamy, że $3T < t < 4T$. Następnie obliczamy, jakie byłyby masy początkowe, gdybyśmy do rachunków przyjęli $t = 3T$, a następnie $t = 4T$:

$$0{,}75\ \text{mg} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \rightarrow \qquad m_0 = 6\ \text{mg}$$

$$0{,}75\ \text{mg} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad \rightarrow \qquad m_0 = 12\ \text{mg}$$

Początkowa masa izotopu należy do przedziału otwartego $m_0 \in (6\ \text{mg}; 12\ \text{mg})$ lub masa początkowa izotopu radu jest równa około:

$$m_0 \approx \frac{1}{2}(6\ \text{mg} + 12\ \text{mg}) \approx\ 9\ \text{mg}.$$

Sposób 3

Zauważamy, że w czwartym okresie czasu połowicznego rozpadu (tj. od $3T$ do $4T$) fragment krzywej rozpadu można przybliżyć odcinkiem prostym. Dlatego wartość funkcji $m(t)$ na środku odcinka od $3T$ do $4T$ można szacować ze średniej arytmetycznej wartości funkcji $m(t)$ na krańcach tego odcinka:

$$m(3{,}5T) \approx \frac{1}{2}\big(m(3T) + m(4T)\big)$$

Korzystamy z pojęcia czasu połowicznego rozpadu:

$$m(3{,}5T) \approx \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 m_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 m_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) m_0 = \frac{3}{32} m_0$$

Podstawiamy dane:

$$m(3{,}5T) \approx \frac{3}{32} m_0 \qquad \rightarrow \qquad m_0 \approx \frac{32}{3} \cdot 0{,}75\ \text{mg} \approx 8\ \text{mg}$$

Początkowa masa izotopu radu wynosiła około 8 mg.

Uwaga, do wzoru $m(3{,}5T) \approx \frac{3}{32} m_0$ można dojść równoważnymi sposobami, wykorzystującymi pojęcie czasu połowicznego rozpadu, na przykład:

$$m(3{,}5T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} m_0$$

Czynnik ¾ pojawia się tutaj jako wynik następującego szacowania: jeśli w ciągu jednego czasu połowicznego rozpadu rozpadnie się połowa jąder, to w połowie tego czasu rozpadnie się około ¼ jąder, czyli pozostanie około ¾ jąder. Powyższy wzór to szacowanie liczby jąder pozostających w próbce po trzech (trzy czynniki 1/2) i pół (czynnik 3/4) czasach połowicznego rozpadu.