Zadanie 1. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.4) opisuje ruchy prostoliniowe jednostajne i jednostajnie zmienne, posługując się zależnościami położenia, wartości prędkości i przyśpieszenia oraz drogi od czasu.

Zasady oceniania[2]

(dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunku za 3 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \text{m}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max}, **oraz** zapisanie wyrażeń (na symbolach lub z podstawionymi danymi) poprawnie określających położenia samochodów (tzn. skorzystanie z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego i ruchu jednostajnego prostoliniowego), np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $d_{max} = (40 + 35t_{max}) - (20t_{max} + 3t_{max}^2)$

2 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max} (lub sumy położenia początkowego d_0 i różnicy Δs dróg, jakie przebyły oba samochody do wyrównania prędkości) np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $\{d_{max} = x_{\mathcal{F}}(t_{max}) - x_{\mathcal{P}}(t_{max})$ lub $d_{max} = d_0 + \Delta s\}$

LUB

---

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. z 2022 r. poz. 1246).

[2] Pod opisem warunków za przyznanie punktów, w niektórych przypadkach podano przykładowe zapisy (lub przykładowe zapisy równoważne), które spełniają te warunki w minimalnym stopniu.

– poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia na symbolach) czasu t_{max}, w którym odległość między samochodami jest maksymalna (tzn. przyrównanie wartości prędkości i skorzystanie ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym) **oraz** zapisanie wyrażenia (na symbolach lub z podstawionymi danymi) poprawnie określającego położenie jednego z samochodów dla dowolnego t bądź wyznaczonego t_{max} (tzn. skorzystanie z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego lub ruchu jednostajnego prostoliniowego), np. zapisy równoważne poniższym:

$20 + 6t_{max} = 35$ oraz $\{x_{\mathcal{F}}(t) = 40 + 35t$ lub $x_{\mathcal{P}}(t) = 20t + 3t^2\}$

1 pkt – opisanie strategii rozwiązania (bez wykonania dalszych obliczeń): stwierdzenie, że maksymalna odległość pomiędzy samochodami jest w chwili, w której wartości prędkości samochodów są sobie równe, a odległość między nimi jest równa różnicy położeń

LUB

– przyrównanie wartości prędkości obu samochodów **oraz** zastosowanie wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym dla samochodu $\mathcal{P}$ (na symbolach wielkości lub z podstawionymi danymi), np. zapisy równoważne poniższym:

$\{v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $v_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}} + at\}$

albo

$20 + 6t_{max} = 35$

albo

$a = \frac{v_{\mathcal{F}} - v_{0\mathcal{P}}}{t_{max}}$ (w jednym zapisie)

LUB

– przyrównanie wartości prędkości obu samochodów **oraz** zapisanie odległości maksymalnej między samochodami jako różnicy położeń samochodów w chwili t_{max} (bądź sumy położenia początkowego i różnicy dróg, jakie przebyły oba samochody do wyrównania prędkości), np. zapisy równoważne poniższym:

$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $d_{max} = x_{\mathcal{F}}(t_{max}) - x_{\mathcal{P}}(t_{max})$

albo

$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$ oraz $d_{max} = d_0 + \Delta s$

LUB

– poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów z wykorzystaniem równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{P}$ i równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2$ oraz $x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunkach za 3 pkt i 2 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \mathrm{m}$.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia zależności $d(t)$ (funkcji $d(t)$) jako różnicy położeń samochodów od czasu **oraz** zapisanie prawidłowej postaci tej funkcji, **oraz** prawidłowa metoda obliczenia wartości maksymalnej funkcji $d(t)$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$d(t) = (40 + 35t) - (20t + 3t^2) = -3t^2 + 15t + 40 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = -\frac{\Delta}{4A}$$

2 pkt – zapisanie odległości pomiędzy samochodami jako różnicy położeń **oraz** poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów, np. zapisy równoważne poniższym:

$$d = x_{\mathcal{F}} - x_{\mathcal{P}} \quad \text{oraz} \quad x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2 \quad \text{i} \quad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

1 pkt – opisanie strategii rozwiązania: zapisanie odległości pomiędzy samochodami jako różnicy położeń **oraz** stwierdzenie, że maksymalna odległość będzie największą wartością funkcji opisującej zależność różnicy położeń od czasu

LUB

– poprawne zapisanie zależności położenia od czasu dla każdego z samochodów z wykorzystaniem równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{P}$ i równania ruchu jednostajnego prostoliniowego dla samochodu $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$x_{\mathcal{P}} = 20t + 3t^2 \quad \text{oraz} \quad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda (opisana w warunku za 3 pkt) obliczenia maksymalnej odległości pomiędzy samochodami **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $d_{max} = 58{,}75\ \text{m}$.

3 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, **oraz** poprawny sposób obliczenia drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \quad \text{oraz} \quad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = d_0 + \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$$

2 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi $\tilde{s}$, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \quad \text{oraz} \quad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \quad \text{oraz} \quad d_{max} = d_0 + \tilde{s}$$

LUB

– zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, **oraz** poprawny sposób obliczenia drogi, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \qquad \text{oraz} \qquad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \tilde{s} = \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$$

1 pkt – zapisanie wzoru na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$ **oraz** zapisanie warunku na tę prędkość, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = 6t - 15 \qquad \text{oraz} \qquad \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$$

LUB

– zapisanie warunku na prędkość $\tilde{v}_P$ samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia związanym z samochodem $\mathcal{F}$, gdy odległość pomiędzy samochodami jest największa **oraz** zapisanie odległości maksymalnej jako sumy odległości początkowej i drogi $\tilde{s}$, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad d_{max} = d_0 + \tilde{s}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga dodatkowa do zasad oceniania sposobem 3.

Sposób 3. rozwiązania może pomijać etap obliczenia t_{max}.

Przykładowe pełne rozwiązania[3]

Sposób 1. (z przyrównaniem wartości prędkości samochodów)

Odległość d pomiędzy samochodami zwiększa się (licząc od chwili $t_0 = 0$) w takim czasie, w jakim samochód $\mathcal{F}$ ma większą prędkość od samochodu $\mathcal{P}$. W chwili t_{max}, gdy wartości prędkości obu samochodów zrównają się, ta odległość będzie największa. Wynika to z faktu, że licząc od chwili t_{max}, wartość prędkości samochodu $\mathcal{P}$ staje się większa od wartości prędkości samochodu $\mathcal{F}$, a zatem odległość pomiędzy samochodami będzie malała – do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$.

Samochód $\mathcal{P}$ od chwili $t_0 = 0$ poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym, zatem zależność prędkości tego samochodu od czasu dana jest wzorem:

$$v_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}} + at \quad \rightarrow \quad v_{\mathcal{P}} = 20 + 6t$$

Współczynniki liczbowe w równaniach ruchu wyrażamy w jednostkach podstawowych układu SI. Przyrównamy wartości prędkości obu samochodów i obliczymy t_{max} – czas, po jakim odległość pomiędzy samochodami będzie największa:

$$v_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{F}}$$

$$20 + 6t_{max} = 35 \quad \rightarrow \quad t_{max} = 2{,}5\ \text{s}.$$

[3] Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania.

Obliczymy odległość d_{max} pomiędzy samochodami w chwili t_{max}. Przyjmiemy, że w chwili $t_0 = 0$ samochód policyjny $\mathcal{P}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{P}} = 0$, a samochód osobowy $\mathcal{F}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{F}} = 40\ \text{m}$. Określimy położenia $x_{\mathcal{P}}$, $x_{\mathcal{F}}$ obu samochodów w chwili t_{max} (licząc od chwili $t_0 = 0$).

Skorzystamy z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego prostoliniowego (dla $\mathcal{P}$) i ruchu jednostajnego prostoliniowego (dla $\mathcal{F}$):

$$x_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}}t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad x_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 20 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2{,}5)^2 = 68{,}75\ \text{m}$$

$$x_{\mathcal{F}} = d_0 + v_{\mathcal{F}}t \quad \rightarrow \quad x_{\mathcal{F}}(t_{max}) = 40 + 35 \cdot 2{,}5 = 127{,}5\ \text{m}$$

Odległość maksymalna d_{max} między samochodami jest równa różnicy położeń obu samochodów w chwili t_{max}.

$$d_{max} = 127{,}5\ \text{m} - 68{,}75\ \text{m} = 58{,}75\ \text{m}$$

Sposób 2. (z obliczeniem maksimum funkcji)

Wyznaczymy odległość $d(t)$ między samochodami w funkcji czasu i znajdziemy maksimum tej funkcji. Funkcję $d(t)$ określamy w przedziale czasu od chwili $t_0 = 0$ do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$.

Przyjmiemy, że w chwili $t_0 = 0$ samochód policyjny $\mathcal{P}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{P}} = 0$, a samochód osobowy $\mathcal{F}$ znajdował się w położeniu $x_{0\mathcal{F}} = d_0$. Określimy położenia $x_{\mathcal{P}}$, $x_{\mathcal{F}}$ obu samochodów w dowolnej chwili t, licząc od $t_0 = 0$ do momentu, gdy $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$. Skorzystamy z równań ruchu.

Samochód $\mathcal{P}$ od chwili $t_0 = 0$ poruszał się ruchem jednostajnie przyśpieszonym, zatem:

$$x_{\mathcal{P}} = v_{0\mathcal{P}}t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad x_{\mathcal{P}} = 20t + \frac{1}{2} \cdot 6t^2 = 20t + 3t^2$$

Samochód $\mathcal{F}$ poruszał się ruchem jednostajnym prostoliniowym, zatem:

$$x_{\mathcal{F}} = d_0 + v_{\mathcal{F}}t \quad \rightarrow \quad x_{\mathcal{F}} = 40 + 35t$$

Współczynniki liczbowe w równaniach ruchu są wyrażone w jednostkach podstawowych układu SI.

Wyznaczymy odległość między samochodami w funkcji czasu t. Odległość d między samochodami jest równa różnicy położeń obu samochodów w chwili t:

$$d(t) = x_{\mathcal{F}} - x_{\mathcal{P}} \quad \rightarrow \quad d(t) = 40 + 35t - (20t + 3t^2)$$

$$d(t) = -3t^2 + 15t + 40$$

Uwaga!

Funkcja $d(t)$ jest określona w przedziale czasu od $t_0 = 0$ do czasu, po jakim $\mathcal{P}$ dogoni $\mathcal{F}$. Będzie to czas, po którym odległość pomiędzy samochodami jest równa zero:

$$d(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -3t^2 + 15t + 40 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{705} \approx 26{,}6\ \text{s} \quad \rightarrow \quad t_1 \approx -1{,}9\ \text{s} \qquad t_2 \approx 6{,}9\ \text{s}$$

Funkcję kwadratową $d(t) = -3t^2 + 15t + 40$ rozpatrujemy dla $t \in [0, t_2]$.

Znajdziemy maksimum funkcji kwadratowej $d(t) = -3t^2 + 15t + 40$. W tym celu obliczymy współrzędne (t_{max}, d_{max}) wierzchołka paraboli będącej wykresem $d = d(t)$:

$$t_{max} = -\frac{B}{2A} = -\frac{15}{2 \cdot (-3)} = 2{,}5 \text{ s} \qquad d_{max} = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{15^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 40}{4 \cdot (-3)} = 58{,}75 \text{ m}$$

Największa odległość pomiędzy samochodami jest równa $58{,}75$ m.

Sposób 3. (z wykorzystaniem prędkości względnej)

Rozważamy ruch samochodu $\mathcal{P}$ w poruszającym się układzie odniesienia związanym na sztywno z samochodem $\mathcal{F}$. Początek tego układu odniesienia określimy w miejscu, gdzie znajdował się samochód $\mathcal{P}$ w chwili $t_0 = 0$. Równanie ruchu (na prędkość) samochodu $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$ ma postać:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t) = v_P - v_F = 6t - 15$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0) = -15 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Do chwili t_{max} (czyli do momentu zrównania się prędkości względem ziemi), samochód $\mathcal{P}$ – w układzie odniesienia samochodu $\mathcal{F}$ – oddala się od niego ($\mathcal{F}$ jest nieruchomy w swoim układzie odniesienia). Równość prędkości (względem ziemi) oznacza, że w chwili t_{max}, prędkość samochodu $\mathcal{P}$ w układzie $\mathcal{F}$ wynosi zero:

$$\tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max}) = 0$$

Od chwili t_{max}, samochód $\mathcal{P}$ będzie się zbliżał do $\mathcal{F}$. Zatem w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, odległość między samochodami była największa w chwili t_{max} i wynosiła:

$$d_{max} = d_0 + \tilde{s}$$

gdzie $\tilde{s}$ jest drogą, jaką przebył samochód $\mathcal{P}$ w układzie odniesienia $\mathcal{F}$, od chwili $t_0 = 0$ do chwili t_{max}:

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2 - \tilde{v}_{\mathcal{P}}(t_{max})^2}{2a} = \frac{\tilde{v}_{\mathcal{P}}(0)^2}{2a}$$

$$\tilde{s} = \frac{15^2 \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 18{,}75 \text{ m}$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy:

$$d_{max} = d_0 + \tilde{s} = 40 \text{ m} + 18{,}75 \text{ m} = 58{,}75 \text{ m}$$