Zadanie 2.1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: III.5) oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej całkowitej **oraz** podanie prawidłowego wyniku w postaci ułamka zwykłego: $\frac{E_{kin\ post}}{E_{kin\ calk}} = \frac{2}{3}$

Uwaga! Akceptuje się przedstawienie wyniku w postaci równoważnej: $\frac{E_{kin\ calk}}{E_{kin\ post}} = \frac{3}{2}$

2 pkt – zapisanie energii kinetycznej całkowitej jako sumy energii kinetycznej ruchu obrotowego i energii kinetycznej ruchu postępowego **oraz** wykorzystanie/zapisanie wzorów na oba rodzaje energii, **oraz** wykorzystanie/zapisanie związku między prędkością liniową i prędkością kątową, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{kin\ calk} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{v}{R}$$

albo w jednym równaniu

$$E_{kin\ calk} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

---

[3] Przykładowe rozwiązania mogą zawierać dodatkowe wyjaśnienia/komentarze, które nie podlegają ocenie. Wymagane elementy rozwiązania zdającego podlegające ocenie są wyszczególnione i opisane w kryteriach punktacji zasad oceniania.

1 pkt – zapisanie energii kinetycznej całkowitej jako sumy energii kinetycznej ruchu obrotowego i energii kinetycznej ruchu postępowego **oraz** wykorzystanie/zapisanie wzoru na jedną z tych energii:

$$E_{kin\ calk} = E_{kin\ post} + E_{kin\ obr} \quad \text{oraz} \quad \left(E_{kin\ post} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{albo} \quad E_{kin\ obr} = \frac{1}{2}I_0\omega^2\right)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapiszemy wzór na całkowitą energię kinetyczną walca i wykorzystamy wzory na energię kinetyczną ruchu postępowego oraz energię kinetyczną ruchu obrotowego walca:

$$E_{kin\ calk} = E_{kin\ post} + E_{kin\ obr} \qquad \rightarrow \qquad E_{kin\ calk} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Zastosujemy związek między prędkością liniową i prędkością kątową w przypadku toczenia się bez poślizgu oraz wzór na moment bezwładności walca:

$$E_{kin\ calk} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

Obliczymy iloraz energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej całkowitej:

$$\frac{E_{kin\ post}}{E_{kin\ calk}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{3}{4}mv^2} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 2.2. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami; *LUB* II.20) […] stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. III.5) oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 1.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości przyśpieszenia liniowego walca **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca **oraz** zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca, **oraz** uwzględnienie wartości F i T sił $\vec{F}$, $\vec{T}$ w obu równaniach ruchu, **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym walca, np. zapisy równoważne poniższym:

$ma = F - T$ oraz $I \cdot \frac{a}{R} = RT$

1 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca **oraz** zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem osi symetrii, **oraz** zapisanie wartości siły wypadkowej jako $F_w = F - T$ lub zapisanie wzoru na moment siły tarcia $M = RT$, np. zapisy równoważne poniższym:

$ma = F - T$ oraz $I\epsilon = M$

albo

$ma = F_w$ oraz $I\epsilon = RT$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 2.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości przyśpieszenia liniowego walca **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu (z uwzględnieniem siły $\vec{F}$) wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym walca, **oraz** uwzględnienie związku między momentem bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu a I_0, np. zapisy równoważne poniższym:

$I_{chw}\frac{a}{R} = RF$ oraz $I_{chw} = I_0 + mR^2$

1 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu (z uwzględnieniem wzoru na moment siły) wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie (np. poprzez oznaczenie), że moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu jest różny od I_0, np. zapisy równoważne poniższym:

$I_{chw}\epsilon = RF$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 3.)

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości przyśpieszenia liniowego walca **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o pracy mechanicznej całkowitej i zmianie energii kinetycznej całkowitej **oraz** zastosowanie/wykorzystanie wyrażenia na tę pracę całkowitą (równą pracy siły $\vec{F}$), **oraz** zastosowanie/wykorzystanie w tym równaniu wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego walca i energię kinetyczną ruchu obrotowego walca, **oraz** wykorzystanie związku między prędkością kątową i liniową (dla toczenia się bez poślizgu), np. zapisy równoważne poniższym:

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad \text{oraz} \quad v = \omega R$$

albo w jednym równaniu

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\frac{v^2}{R^2}$$

LUB

– zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o pracy mechanicznej całkowitej i zmianie energii kinetycznej całkowitej **oraz** zastosowanie/wykorzystanie wyrażenia na tę pracę całkowitą (równą pracy siły $\vec{F}$), **oraz** zastosowanie/wykorzystanie w tym równaniu wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego walca i energię kinetyczną ruchu obrotowego walca, **oraz** wykorzystanie związku między przyśpieszeniem a drogą i prędkością w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad \text{oraz} \quad 2as = v^2$$

albo w jednym równaniu

$$F\frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o pracy mechanicznej całkowitej i zmianie energii kinetycznej całkowitej **oraz** zastosowanie/wykorzystanie wyrażenia na tę pracę całkowitą (równą pracy siły $\vec{F}$), **oraz** wyodrębnienie w tym równaniu energii kinetycznych ruchu postępowego walca i energii kinetycznej ruchu obrotowego walca, np. zapisy równoważne poniższym:

$$Fs = \Delta E_{kin\ post} + \Delta E_{kin\ obr}$$

LUB

– zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o pracy siły wypadkowej i zmianie energii kinetycznej ruchu postępowego **oraz** zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o pracy wypadkowego momentu sił i zmianie energii kinetycznej ruchu obrotowego, **oraz** zapisanie/wykorzystanie wyrażeń definiujących pracę siły wypadkowej i pracę wypadkowego momentu siły, np. zapisy równoważne poniższym:

$$(F - T)s = \Delta E_{kin\ post} \quad \text{oraz} \quad RT \cdot \alpha = \Delta E_{kin\ obr}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)

Na walec w kierunku poziomym działają siły: siła tarcia statycznego $\vec{T}$ oraz siła $\vec{F}$. Siła tarcia statycznego ma niezerowy moment siły względem osi obrotu walca. Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego walca oraz dla ruchu obrotowego walca (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} ma = F - T \\ I_0\epsilon = RT \end{cases}$$

Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym w przypadku toczenia się bez poślizgu oraz wzór na moment bezwładności walca:

$$\begin{cases} ma = F - T \\ \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = RT \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ma = F - T \\ \frac{1}{2}ma = T \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczymy wartość przyśpieszenia liniowego walca:

$$ma = F - \frac{1}{2}ma \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}ma = F \quad \rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m}$$

Obliczymy wartość liczbową wartości przyśpieszenia liniowego walca:

$$a = \frac{2}{3}\cdot\frac{30\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{kg}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sposób 2. (zastosowanie metody chwilowej osi obrotu)

Rozważmy obrót walca wokół chwilowej osi obrotu. Chwilowa oś obrotu zawiera odcinek styczności walca z podłożem w danej chwili. Moment siły tarcia statycznego względem tej osi obrotu jest równy zero (ponieważ ramię tej siły jest równe zero). Moment siły względem chwilowej osi obrotu powoduje siła $\vec{F}$, która jest przyłożona do środka masy walca. Ramię tej siły jest równe R. W tej metodzie rozważamy tylko ruch obrotowy. Zapiszemy równanie wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu:

$$I_{chw}\epsilon = FR$$

Wyznaczymy wzór na moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu (z twierdzenia Steinera):

$$I_{chw} = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym (w przypadku metody chwilowej osi obrotu jest to przyśpieszenie styczne do chwilowego toru ruchu punktu na środku walca) a przyśpieszeniem kątowym:

$$\frac{3}{2}mR^2\cdot\frac{a}{R} = FR$$

Z powyższego układu równań wyznaczymy wartość przyśpieszenia liniowego walca:

$$\frac{3}{2}ma = F \quad \rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m}$$

Obliczymy wartość liczbową wartości przyśpieszenia liniowego walca:

$$a = \frac{2}{3}\cdot\frac{30\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{kg}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sposób 3. (zastosowanie twierdzenia o pracy sił i momentów sił)

Zapiszemy równanie wynikające z twierdzenia o pracy siły wypadkowej i zmianie energii kinetycznej ruchu postępowego:

$$1) \quad W_{F_w} = \Delta E_{kin\ post} \quad \rightarrow \quad 1a) \quad (F - T)s = \frac{1}{2}mv^2$$

Zapiszemy równanie wynikające z twierdzenia o pracy wypadkowego momentu sił i zmianie energii kinetycznej ruchu obrotowego:

$$2) \quad W_{M_w} = \Delta E_{kin\ obr} \quad \rightarrow \quad 2a) \quad RT \cdot \alpha = \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad \rightarrow \quad 2b) \quad Ts = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Gdy dodamy stronami równania 1a) i 2b) (wykorzystując związek $s = R\alpha$) to otrzymamy równanie wyrażające twierdzenie o pracy mechanicznej całkowitej i zmianie energii kinetycznej całkowitej (prace siły tarcia statycznego i momentu siły tarcia statycznego znoszą się – tarcie statyczne nie zwiększa ani nie zmniejsza energii całkowitej mechanicznej):

$$3) \quad Fs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Wykorzystamy związek między prędkością kątową i liniową (dla toczenia się bez poślizgu), oraz wyrażenie na moment bezwładności walca:

$$4) \quad Fs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 4a) \quad Fs = \frac{3}{4}mv^2$$

Wykorzystamy związek kinematyczny między przyśpieszeniem a drogą i prędkością w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej:

$$5) \quad v^2 = 2as$$

Równanie 5) podstawimy do równania 4a), skąd wyznaczymy wartość przyśpieszenia:

$$6) \quad Fs = \frac{3}{4}m \cdot 2as \quad \rightarrow \quad 6a) \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m}$$

Obliczymy wartość liczbową wartości przyśpieszenia liniowego walca:

$$a = \frac{2}{3} \cdot \frac{30\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{kg}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$