Zadanie 2.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.4) […] posługuje się pojęciami […] momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami; III.5) […] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy. II.20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zaznaczenia w trzech stwierdzeniach.
1 pkt – poprawne zaznaczenia w dwóch stwierdzeniach.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie

PPF

Zadanie 2.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach […]; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał; II.23) opisuje ruch ciał na równi pochyłej. III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami. *ALBO* II.20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. III.5) […] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości a przyśpieszenia liniowego walca W2 poprzez g, β i k_2 **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na a:

$$a = \frac{\sin\beta}{1+k_2}g$$

3 pkt – poprawne zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 **oraz** uwzględnienie w tych równaniach poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 i wartość momentu siły działającego na W2, **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym i wzoru na moment bezwładności walca W2, **oraz** uwzględnienie (zob. uwaga poniżej) warunku, że siła tarcia nie osiągnęła wartości maksymalnej, np. zapisy równoważne poniższym:

$ma = mg\sin\beta - T$ oraz $k_2 mR^2\frac{a}{R} = RT$

Uwaga! Spełnienie ostatniego warunku (po trzecim „oraz") oznacza pozostawienie wartości siły tarcia T jako niewiadomej w układzie równań. Zdający nie spełnia powyższego kryterium, jeśli zapisze $T = \mu mg\cos\beta$.

LUB

– wyprowadzenie (z dynamicznych równań ruchu) i zapisanie prawidłowej postaci wzoru na a, **pomimo** błędnego określenia siły tarcia, jako takiej, która osiągnęła wartość maksymalną (tzn. z jedynym błędnym zapisem: $T = \mu mg\cos\beta$), np.:

(równania ruchu z błędnym zapisem $T = \mu mg\cos\beta$) $\rightarrow$ $a = \frac{\sin\beta}{1+k_2}g$

2 pkt – poprawne zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 **oraz** uwzględnienie w tych równaniach poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 **oraz** wartość momentu siły działającego na W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$(ma = mg\sin\beta - T$ oraz $I_2\epsilon = RT)$

albo

$(ma = Q_{\parallel} - T$ oraz $I_2\epsilon = RT)$

1 pkt – zapisanie dwóch równań ruchu wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego i ruchu obrotowego (względem osi symetrii) walca W2 (bez poprawnego rozpisania F_W i M_T), np. zapisy równoważne poniższym:

$(ma = F_w$ oraz $I_2\epsilon = M_T)$

LUB

– zapisanie poprawnego wzoru na wartość siły wypadkowej działającej na walec W2 **oraz** zapisanie poprawnego wzoru na moment siły tarcia działający na walec W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$F_w = Q_{\parallel} - T$ oraz $M_T = RT$

LUB

– poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego walca W2 **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość siły wypadkowej działającej na walec W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$ma = Q_{\parallel} - T$

LUB

– poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem osi symetrii, **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość momentu siły działającego na W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$I_2\epsilon = RT$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda (zastosowanie zasady zachowania energii) wyznaczenia wartości a przyśpieszenia liniowego walca W2 poprzez g, β i k_2 **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na a:

$$a = \frac{\sin\beta}{1 + k_2} g$$

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia przyśpieszenia liniowego walca z zasady zachowania energii, tzn. spełnienie warunków za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności walca, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_2 mR^2 \frac{v^2}{R^2} \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2as$$

albo

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}k_2 v^2 \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2as$$

2 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** poprawne zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego walca W2, energię kinetyczną ruchu obrotowego walca W2 i energię potencjalną walca W2, **oraz** zastosowanie związku między prędkością kątową walca a prędkością liniową walca, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2 \quad \text{oraz} \quad v = \omega R\right) \quad \text{albo} \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\frac{v^2}{R^2}$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** uwzględnienie (poprzez oznaczenie) w tym równaniu energii kinetycznych ruchu postępowego walca W2, ruchu obrotowego walca W2 i energii potencjalnej walca W2, np. zapisy równoważne poniższym:

$E_{pot\ wal} = E_{kin\ wal\ post} + E_{kin\ wal\ obr}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 3.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości a przyśpieszenia liniowego walca W2 poprzez g, β i k_2 **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na a:

$$a = \frac{\sin\beta}{1+k_2} g$$

3 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia (z kątem β) opisującego moment siły działający na W2 (względem chwilowej osi obrotu), **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym, **oraz** uwzględnienie związku między I_{chw} a I_2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = R \cdot mg\sin\beta \qquad \text{oraz} \qquad \epsilon = \frac{a}{R} \qquad \text{oraz} \qquad I_{chw} = I_2 + mR^2$$

albo (w jednym równaniu)

$$(I_2 + mR^2)\frac{a}{R} = R \cdot mg\sin\beta$$

2 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca W2 względem chwilowej osi obrotu **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia (z kątem β) opisującego moment siły działający na W2 (względem chwilowej osi obrotu) **oraz** uwzględnienie (np. poprzez oznaczenie), że moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu jest różny od I_2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = R \cdot mg\sin\beta$$

1 pkt – poprawne zapisanie równania ruchu (z oznaczeniem momentu siły ciężkości) wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu (oś chwilowa musi być zidentyfikowana) **oraz** uwzględnienie (np. poprzez oznaczenie), że moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu jest różny od I_2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$I_{chw}\epsilon = M_Q$$

LUB

– zapisanie poprawnego wzoru na moment siły względem chwilowej osi obrotu (ta oś chwilowa musi być zidentyfikowana) **oraz** poprawna identyfikacja siły, która powoduje moment względem chwilowej osi obrotu, np. zapisy równoważne poniższym:

$$M_Q = R \cdot Q_{\parallel} \qquad \text{albo} \qquad M_Q = R \cdot mg\sin\beta$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)

Na walec W2 działają trzy siły: siła tarcia statycznego $\vec{T}$ oraz siła reakcji równi $\vec{F}_r$ oraz siła ciężkości walca $\vec{Q}$. Wypadkowa ze wszystkich sił działających na walec ma kierunek wzdłuż równi i wartość opisaną wyrażeniem:

$$F_w = mg\sin\beta - T$$

Jedynie siła tarcia statycznego ma niezerowy moment względem osi obrotu walca W2:

$$M_T = RT$$

Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego walca W2 oraz dla ruchu obrotowego walca W2 (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} ma = mg\sin\beta - T \\ I_2\epsilon = RT \end{cases}$$

Siła tarcia statycznego nie osiągnęła wartości maksymalnej, zatem pozostaje niewiadomą w powyższym układzie równań. Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym (w przypadku toczenia się bez poślizgu) oraz wzór na moment bezwładności walca W2:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\beta - T \\ k_2 mR^2\dfrac{a}{R} = RT \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ma = mg\sin\beta - T \\ k_2 ma = T \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} ma = mg\sin\beta - k_2 ma \\ k_2 ma = T \end{cases} \rightarrow a + k_2 a = g\sin\beta$$

$$a = \frac{\sin\beta}{1+k_2}g$$

Sposób 2. (zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej)

Zgodnie z przyjętym modelem zjawiska energia mechaniczna pozostaje stała podczas ruchu walca – siły oporów pomijamy, a siła tarcia statycznego nie zmienia całkowitej energii kinetycznej (prace siły tarcia statycznego i momentu siły tarcia statycznego znoszą się).

W chwili początkowej energia mechaniczna walca W2 jest równa jego energii potencjalnej grawitacji. Przyjmiemy, że zero energii potencjalnej jest na poziomie środka masy walca W2, gdy ten jest u podnóża równi. Zatem u podnóża równi energia mechaniczna walca W2 jest równa tylko jego energii kinetycznej całkowitej (ruchu postępowego i obrotowego). Zapiszemy zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$E_{pot\ wal} = E_{kin\ wal\ post} + E_{kin\ wal\ obr}$$

Wysokość, na jakiej znajduje się środek masy walca W2 w chwili początkowej, liczona względem poziomu zera energii potencjalnej, przyjmiemy jako h. Zastosujemy wzory na wymienione rodzaje energii:

$$1)\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2$$

Wykorzystamy związek między prędkością kątową i liniową (dla toczenia się bez poślizgu) oraz wzór na moment bezwładności walca W2. Wyznaczymy kwadrat prędkości walca u podnóża równi:

$$2)\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(k_2 mR^2)\cdot\frac{v^2}{R^2} \rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}k_2 v^2$$

$$3)\quad v^2 = \frac{2gh}{(1+k_2)}$$

Wykorzystamy związek kinematyczny między przyśpieszeniem a drogą i prędkością w ruchu jednostajnie przyśpieszonym (siła wypadkowa jest stała) bez prędkości początkowej, drogę powiążemy z wysokością i kątem nachylenia równi:

$$4)\quad v^2 = 2as \qquad 5)\quad h = \sin\beta \cdot s$$

Przyrównamy do siebie prawe strony równań 3) i 4) z uwzględnieniem związku 5):

$$6)\quad 2as = \frac{2g\sin\beta \cdot s}{(1+k_2)} \quad \rightarrow$$

$$7)\quad a = \frac{\sin\beta}{(1+k_2)}g$$

Sposób 3. (zastosowanie metody chwilowej osi obrotu)

Rozważmy obrót walca W2 wokół chwilowej osi obrotu. Chwilowa oś obrotu zawiera odcinek styczności walca z powierzchnią równi w danej chwili. Jedynie siła ciężkości $\vec{Q}$ walca ma niezerowy moment względem tej osi obrotu (tzn. jej składowa $\vec{Q}_{\parallel}$ wzdłuż równi).
Ramię tej siły jest równe R, zatem:

$$1)\ M_Q = R \cdot Q_{\parallel} \quad \text{gdzie} \quad Q_{\parallel} = mg\sin\beta$$

W metodzie chwilowej osi obrotu rozważamy tylko ruch obrotowy. Zapiszemy równanie wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego walca względem chwilowej osi obrotu:

$$2a)\ I_{chw}\epsilon = M_Q \quad \rightarrow \quad I_{chw}\epsilon = R \cdot Q_{\parallel} \quad \rightarrow \quad 2b)\ I_{chw}\epsilon = R \cdot mg\sin\beta$$

Wyznaczymy wzór na moment bezwładności walca W2 względem chwilowej osi obrotu (z twierdzenia Steinera):

$$3)\ I_{chw} = I_2 + mR^2 = k_2mR^2 + mR^2 = (k_2+1)mR^2$$

Do równania 2b) podstawimy zależność 3) oraz zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym a przyśpieszeniem kątowym (w przypadku metody chwilowej osi obrotu przyśpieszenie liniowe jest przyśpieszeniem chwilowym stycznym do chwilowego toru ruchu punktu środka masy walca W2):

$$4)\quad (k_2+1)mR^2 \cdot \frac{a}{R} = R \cdot mg\sin\beta \qquad \rightarrow \qquad (k_2+1)a = g\sin\beta$$

$$5)\quad a = \frac{\sin\beta}{(1+k_2)}g$$