Zadanie 2.1. (0–1)

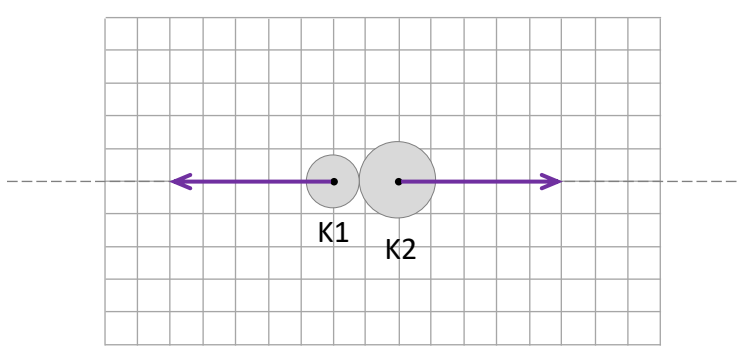
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.10) (SP) stosuje pojęcie siły jako wielkości opisującej oddziaływanie na ciało, uwzględnia wektorowy charakter siły – wskazuje wartość, kierunek i zwrot wektora siły oraz ciało, do którego przyłożona jest siła […]; II.11) (SP) rozpoznaje i nazywa siły, podaje ich przykłady w różnych sytuacjach praktycznych (siły: […] nacisku, sprężystości […]). I.6) tworzy […] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał.

Zasady oceniania

1 pkt – narysowanie dwóch sił o równych wartościach, przeciwnych zwrotach, leżących na prostej łączącej środki kul i przyłożonych – odpowiednio – w środku kuli K1 lub środku kuli K2.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie



Zadanie 2.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. II.15) wykorzystuje zasadę zachowania pędu do opisu zachowania się izolowanego układu ciał; II.16) rozróżnia i analizuje zderzenia sprężyste i niesprężyste; 20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1. i sposobem 2.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek ZZP
Poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania pędu (przed zderzeniem i po zderzeniu) **oraz** poprawne zastosowanie wzorów na pędy każdej z kul z uwzględnieniem zwrotów prędkości/pędów kul (zwroty wyrażone odpowiednim znakiem przy współrzędnej prędkości), np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_1 v_1 = -m_1 v_2 + m_2 v_2$$

albo

$$\vec{p}_{1\,przed} = \vec{p}_{1\,po} + \vec{p}_{2\,po} \quad \text{gdzie} \quad \vec{p}_{1\,przed} = [m_1 v_1] \quad \vec{p}_{1\,po} = [m_1(-v_2)] \quad \vec{p}_{2\,po} = [m_2 v_2]$$

Warunek ZZE
Poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii (przed zderzeniem i po zderzeniu) **oraz** poprawne zastosowanie wzorów na energie kinetyczne każdej z kul, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Warunek V1V2
Spełnienie warunków **ZZP oraz ZZE, oraz** wyprowadzenie i zapisanie zależności – z wyeliminowanymi masami – między wartościami v_2 i v_1 prędkości $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_1$, np. zapisy równoważne poniższym:

ZZP oraz ZZE $\rightarrow$ $v_1 = 2v_2$

Warunek ZZV
Powołanie się na zasadę zachowania prędkości względnej przy zderzeniu centralnym sprężystym (może być słownie lub z wykorzystaniem ogólnego zapisu symbolicznego).

Warunek ZZV_V1V2
Spełnienie warunku **ZZV oraz** i zapisanie zależności między wartościami v_2 i v_1 prędkości $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_1$, np. zapisy równoważne poniższym:

ZZV $\rightarrow$ $v_1 = 2v_2$

Schemat punktowania
4 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu mas **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego: $\frac{m_2}{m_1} = 3$
3 pkt – spełnienie warunku **V1V2**
LUB
– spełnienie warunków: **ZZV_V1V2 oraz (ZZP albo ZZE)**
2 pkt – spełnienie warunków: **ZZP oraz ZZE**
LUB
– spełnienie warunku **ZZV_V1V2**
LUB
– spełnienie warunków: **ZZV oraz (ZZP albo ZZE)**
1 pkt – spełnienie warunku **ZZP**
LUB
– spełnienie warunku **ZZE**
LUB
– spełnienie warunku **ZZV**
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Zapiszemy równania wynikające z zasady zachowania pędu oraz z zasady zachowania energii. Lewa strona równań będzie oznaczała sytuację przed zderzeniem, a prawa strona równań będzie oznaczała sytuację po zderzeniu. Równanie zasady zachowania pędu zapiszemy na początku w postaci wektorowej:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 = -m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

Równanie wektorowe zapiszemy skalarnie – na współrzędnych. Niech v_1 oznacza współrzędną (dodatnią) prędkości $\vec{v}_1$ kuli K1 określoną wzdłuż osi przechodzącej przez środki kul. Wtedy współrzędna prędkości kuli K2 po zderzeniu wynosi v_2, a współrzędna prędkości kuli K1 po zderzeniu wynosi $-v_2$. Zapiszemy powyższe równania:

$$\begin{cases} m_1v_1 = -m_1v_2 + m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

Wykonamy przekształcenia i wyznaczymy iloraz mas. Uwzględnimy, że $v_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = -m_1 v_2 + m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 = m_1 v_2^2 + m_2 v_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ m_1(v_1^2 - v_2^2) = m_2 v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ m_1(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) = m_2 v_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ m_2 v_2(v_1 - v_2) = m_2 v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ m_2(v_1 - v_2) = m_2 v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ v_1 - v_2 = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 + v_2) = m_2 v_2 \\ v_1 = 2v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(2v_2 + v_2) = m_2 v_2 \\ v_1 = 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 3v_2 = m_2 v_2 \\ v_1 = 2v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 3 = m_2 \\ v_1 = 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m_2}{m_1} = 3 \\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sposób 2.

Powołamy się na pewną ogólną własność dotyczącą prędkości względnych i zderzeń:

LEMAT:

Różnica prędkości dwóch dowolnych ciał *A* i *B* przed zderzeniem sprężystym centralnym ma tę samą wartość oraz przeciwny zwrot co różnica prędkości tych ciał po zderzeniu sprężystym centralnym.

To samo inaczej: Prędkość względna ciał *A* i *B* przed zderzeniem centralnym sprężystym ma tę samą wartość i przeciwny zwrot co prędkość względna tych ciał po zderzeniu.

Komentarz: Niech w pewnym inercjalnym układzie odniesienia $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ będą prędkościami ciał *A* i *B* przed zderzeniem sprężystym, natomiast $\vec{v}'_A$ i $\vec{v}'_B$ będą prędkościami ciał *A* i *B* po tym zderzeniu. Zgodnie z *lematem* mamy:

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = -(\vec{v}'_A - \vec{v}'_B)$$

Powyższe wynika z zasady zachowania energii oraz zasady zachowania pędu.

Zgodnie z *lematem*, w odniesieniu do zderzenia opisanego w zadaniu mamy:

$$\vec{v}_{K1\,przed} - \vec{v}_{K2\,przed} = -(\vec{v}_{K1\,po} - \vec{v}_{K2\,po})$$

Zgodnie z oznaczeniami w zadaniu mamy:

$$\vec{v}_1 - 0 = -(-\vec{v}_2 - \vec{v}_2) \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1 = 2\vec{v}_2$$

Zatem:

$$v_1 = 2v_2$$

Sposób A kontynuacji rozwiązania sposobem 2.

Zapiszemy równanie wynikające z zasady zachowania pędu. Lewa strona równania będzie oznaczała sytuację przed zderzeniem, a prawa strona równań będzie oznaczała sytuację po zderzeniu. Niech v_1 oznacza współrzędną (dodatnią) prędkości $\vec{v}_1$ kuli K1 określoną wzdłuż osi przechodzącej przez środki kul. Wtedy współrzędna prędkości kuli K2 po zderzeniu wynosi v_2, a współrzędna prędkości kuli K1 po zderzeniu wynosi $-v_2$:

$$m_1 v_1 = -m_1 v_2 + m_2 v_2$$

Do powyższego równania podstawimy związek między v_1 a v_2:

$$m_1 2v_2 = -m_1 v_2 + m_2 v_2 \quad \rightarrow \quad 3m_1 v_2 = m_2 v_2$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 3$$

Sposób B kontynuacji rozwiązania sposobem 2.

Zapiszemy równanie wynikające z zasady zachowania energii. Lewa strona równania będzie oznaczała sytuację przed zderzeniem, a prawa strona równań będzie oznaczała sytuację po zderzeniu. Następnie do równania podstawimy związek między v_1 a v_2:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \rightarrow \quad m_1 (2v_2)^2 = m_1 v_2^2 + m_2 v_2^2$$

$$4m_1 v_2^2 = m_1 v_2^2 + m_2 v_2^2 \quad \rightarrow \quad 3m_1 v_2^2 = m_2 v_2^2 \quad \rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = 3$$