Zadanie 3.1. (0–3)

Schemat punktowania

3 p. – prawidłowe wyprowadzenie wzoru na prędkość.

2 p. – prawidłowe zapisanie zasady zachowania energii z wykorzystaniem wzorów na: energię kinetyczną ruchu postępowego, energię kinetyczną ruchu obrotowego, energię potencjalną, oraz wykorzystanie związków: $v = \omega r$ i $I = kmr^2$
lub
– prawidłowe zapisanie II zasady dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego bryły z uwzględnieniem związku $a = \epsilon r$, wzoru $I = kmr^2$ oraz wzorów z kinematyki ruchu jednostajnie przyspieszonego (np. $v^2 = 2as$).

1 p. – zapisanie zasady zachowania energii z uwzględnieniem energii kinetycznej ruchu postępowego oraz energii kinetycznej ruchu obrotowego bryły
lub
– zapisanie II zasady dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego bryły.

0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1. (zasada zachowania energii)

Zapisujemy zasadę zachowania energii. Przyjmujemy, że zero energii potencjalnej dla każdej z brył jest na poziomie środka masy w chwili, gdy bryła dotyka linii l_2. Korzystamy też z warunku braku poślizgu, co określa związek $v = \omega r$.

$$E_{mech}(l_1) = E_{mech}(l_2) \quad \rightarrow \quad E_{pot\,1} + E_{kin\ calk\,1} = E_{pot\,2} + E_{kin\ calk\,2}$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kmr^2\omega^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kv^2 \quad \rightarrow \quad 2gh = v^2 + kv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{2gh}{1+k}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$$

Sposób 2. (równania II zasady dynamiki)

Zapiszemy równania dynamiki ruchu bryły: II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego punktu środka masy oraz II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego względem środka masy. Uwaga, moment siły względem środka masy to moment siły tarcia statycznego (w ogólności siła ta nie osiąga wartości maksymalnej). Z równań tych wyznaczymy przyspieszenie liniowe bryły. Korzystamy też z warunku braku poślizgu, co określa związek $a = \epsilon r$:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - T_s \\ I\epsilon = rT_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ma = mg\sin\alpha - T_s \\ kmr^2\dfrac{a}{r} = rT_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ma = mg\sin\alpha - T_s \\ T_s = kma \end{cases}$$

$$ma = mg\sin\alpha - kma \quad \rightarrow \quad a = g\sin\alpha - ka \quad \rightarrow \quad a = \frac{g\sin\alpha}{k+1}$$

Następnie skorzystamy z równań ruchu jednostajnie przyspieszonego. Drogę jaką przebywa bryła pomiędzy linią l_1 a linią l_2 oznaczymy s. Wtedy też $\sin\alpha = \frac{h}{s}$:

$$v^2 = 2as \quad \rightarrow \quad v^2 = 2\,\frac{g\sin\alpha}{k+1}s = \frac{2g\frac{h}{s}}{k+1}s = \frac{2gh}{k+1} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$$

Zadanie 3.2. (0–1)

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – brak spełnienia powyższego kryterium.

Poprawna odpowiedź
C