Zadanie 3.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]. II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. III.3) stosuje warunki statyki bryły sztywnej; posługuje się pojęciem momentu sił wraz z jednostką.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: II.12) wyznacza graficznie siłę wypadkową dla sił działających w dowolnych kierunkach […]; II.13) stosuje zasady dynamiki do opisu zachowania się ciał. III.2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi; III.4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami. ALBO II.20) […] wykorzystuje […] zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. III.5) […] oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1. albo 3.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$ (lub przekształconego równoważnie)

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt z pierwszego myślnika **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $\frac{1}{2} m_w R^2 \frac{a}{R} = RF_n - RF$

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) spełnienie warunku za 2 pkt z trzeciego myślnika **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności walca i „doklejonego" ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{1}{2} m_w R^2 + m_c R^2 \right) \frac{a}{R} = m_c g R - FR$$

2 pkt – zapisanie poprawnych dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka **oraz** uwzględnienie w nich poprawnych wyrażeń opisujących wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek i wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np.:

$m_c a = F_g - F_n$ oraz $I_0 \epsilon = RF_n - RF$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie dwóch równań wyrażających II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka i ruchu obrotowego bloczka, uwzględniających odpowiednie siły, z błędem znaku przy sile wypadkowej lub wypadkowym momencie sił (tzn. błędny znak może być w obu) **oraz** uwzględnienie związku między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka i wzoru na moment bezwładności bloczka

LUB

– (dotyczy rozwiązania sposobem 3.) zapisanie jednego równania wyrażającego II zasadę dynamiki ruchu obrotowego układu zastępczego walec–ciężarek (bez nici), w chwili, gdy ciężarek (jako punkt materialny) jest na poziomie osi walca i jest „doklejony" do walca **oraz** uwzględnienie sumarycznego momentu bezwładności układu względem osi walca **oraz** uwzględnienie poprawnego momentu sił działających na układ walec–ciężarek, np. zapisy równoważne poniższym:

$$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$$

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka z uwzględnieniem masy m_c cieżarka **oraz** zapisanie równania wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka z uwzględnieniem momentu bezwładności I_0 bloczka, np. zapisy równoważne poniższym

$m_c a = F_w$ oraz $I_0 \epsilon = M$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się poprawnego rozpisania F_w i M.

LUB

– zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek **oraz** zapisanie poprawnego wyrażenia na wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$F_w = F_g - F_n$ oraz $M = RF_n - RF$

Uwaga! W tym warunku nie wymaga się równań II zasady dynamiki.

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość siły wypadkowej działającej na ciężarek, np.:

$m_c a = F_g - F_n$ (lub zapisy równoważne)

LUB

– zapisanie poprawnego równania ruchu wyrażającego II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bloczka względem osi symetrii **oraz** uwzględnienie w tym równaniu poprawnego wyrażenia opisującego wartość wypadkowego momentu siły działającego na bloczek, np. zapisy równoważne poniższym:

$I_0 \epsilon = RF_n - RF$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 2.)

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości F siły działającej na bloczek **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na F:

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$ (lub przekształconego równoważnie)

3 pkt – spełnienie warunku za 2 pkt **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh \quad \text{oraz} \quad v^2 = 2ah$$

albo

$$m_c ah + \frac{1}{2} m_w ah - m_c g h = -Fh$$

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** zastosowanie wzorów na energię kinetyczną ruchu postępowego ciężarka, ruchu obrotowego bloczka i energię potencjalną ciężarka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - m_c g h = -Fh \quad \text{oraz} \quad v = \omega R \right)$$

albo w jednym równaniu

$$\frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{v^2}{R^2} - m_c g h = -Fh$$

LUB

– zapisanie równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej, uwzględniającego odpowiednie rodzaje energii i wzory na te energie, z błędem znaku przy energiach lub pracy **oraz** zastosowanie związku między prędkością liniową ciężarka a prędkością kątową bloczka **oraz** zastosowanie wzoru na moment bezwładności bloczka, **oraz** zastosowanie związku między prędkością a przyśpieszeniem i drogą (z wyeliminowanym czasem) w ruchu jednostajnie przyśpieszonym ciężarka bez prędkości początkowej.

1 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia o zmianie energii mechanicznej i pracy siły niepotencjalnej **oraz** uwzględnienie (poprzez oznaczenie) w tym równaniu zmiany energii kinetycznej ciężarka, zmiany energii kinetycznej ruchu obrotowego walca i zmiany energii potencjalnej ciężarka, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta E_{pot\,c} + \Delta E_{kin\,post\,c} + \Delta E_{kin\,obr\,w} = W_F$$

albo zapis w postaci przyrównania energii

$$E_{kin\,końc\,post\,c} + E_{kin\,końc\,obr\,w} + E_{pot\,końc\,c} = E_{pot\,pocz\,c} - |W_F|$$

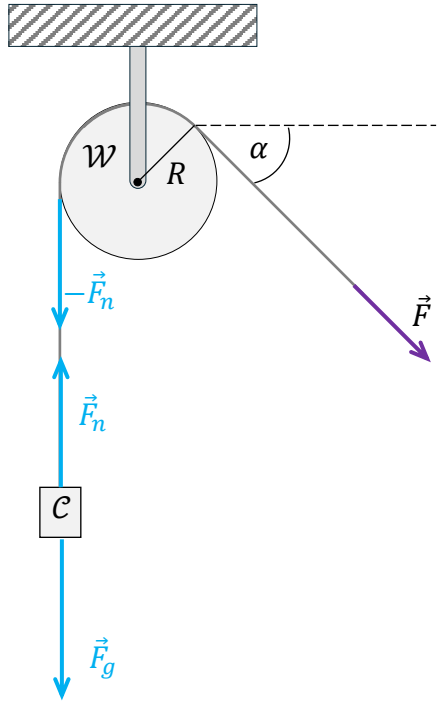
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasad dynamiki)

Na ciężarek $\mathcal{C}$ działają dwie siły: siła reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz siła grawitacji $\vec{F}_g$. Ponieważ ciężarek przyśpiesza w dół, to siła wypadkowa działająca na ciężarek ma kierunek pionowy i zwrot w dół. Wartość tej siły wypadkowej jest opisana wyrażeniem:

$$F_w = F_g - F_n$$



Na bloczek $\mathcal{W}$ działają dwa momenty sił: $\vec{M}_n$ – moment siły reakcji nici $\vec{F}_n$ oraz $\vec{M}_F$ – moment siły $\vec{F}$. Wypadkowy moment siły działający na bloczek jest opisany wyrażeniem:

$$M = RF_n - RF$$

Zapiszemy równania wynikające z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego ciężarka $\mathcal{C}$ oraz dla ruchu obrotowego bloczka $\mathcal{W}$ (względem osi symetrii):

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ I_0 \epsilon = RF_n - RF \end{cases}$$

Ruch przyśpieszony ciężarka $\mathcal{C}$ przekłada się na ruch obrotowy z przyśpieszeniem kątowym bloczka $\mathcal{W}$. Zastosujemy związek $a = \epsilon R$ między przyśpieszeniem liniowym ciężarka a przyśpieszeniem kątowym bloczka. Ponadto wykorzystamy wzór na I_0:

$$\begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w R^2 \cdot \frac{a}{R} = RF_n - RF \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_c a = m_c g - F_n \\ \frac{1}{2} m_w a = F_n - F \end{cases}$$

$$m_c a + \frac{1}{2} m_w a = m_c g - F \quad \rightarrow \quad F = m_c g - m_c a - \frac{1}{2} m_w a$$

Wykorzystamy warunek zadania: $a = \frac{1}{2}g$, zatem:

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} m_w \cdot \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} m_c g - \frac{1}{4} m_w g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia o pracy i zmianie energii mechanicznej)

Zastosujemy twierdzenie o zmianie energii mechanicznej układu i pracy siły niepotencjalnej działającej na układ: zmiana energii mechanicznej układu jest równa pracy siły niepotencjalnej. Siła $\vec{F}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu ruchu, zatem jej praca jest ujemna:

$$\Delta E_{mech} = -|W_F|$$

Zmianę energii mechanicznej rozpiszemy na zmianę energii potencjalnej układu i zmianę energii kinetycznej układu (ciężarka i bloczka):

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = -|W_F|$$

$$\Delta E_{pot\,c} + \Delta E_{pot\,w} + \Delta E_{kin\,post\,c} + \Delta E_{kin\,obr\,w} = -|W_F|$$

Prędkości liniowa ciężarka i kątowa bloczka na początku ruchu są równe 0. Te prędkości w stanie końcowym oznaczymy – odpowiednio – jako v oraz ω. Załóżmy, że między stanem początkowym a końcowym ciężarek przebył drogę h. Na takiej też drodze siła $\vec{F}$ wykonuje pracę. Zatem:

$$m_c g(0 - h) + 0 + \left(\frac{1}{2} m_c v^2 - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 - 0 \right) = -Fh$$

Ruch postępowy ciężarka przekłada się na ruch obrotowy bloczka, więc wykorzystamy związek $v = \omega R$ i wzór na moment bezwładności bloczka:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_w R^2 \frac{v^2}{R^2} = -Fh$$

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{4} m_w v^2 = -Fh$$

Wykorzystamy związek $v^2 = 2ah$ wynikający z równań ruchu jednostajnie przyśpieszonego:

$$-m_c gh + \frac{1}{2} m_c 2ah + \frac{1}{4} m_w 2ah = -Fh$$

$$-m_c gh + m_c ah + \frac{1}{2} m_w ah = -Fh$$

Wykorzystamy związek $a = \frac{1}{2}g$, podany w treści zadania:

$$-m_c gh + m_c \frac{1}{2} gh + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} gh = -Fh$$

$$-m_c g + m_c \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} m_w \frac{1}{2} g = -F$$

$$F = m_c g - m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g = m_c \frac{1}{2} g - \frac{1}{4} m_w\, g$$

$$F = \frac{1}{2} g \left(m_c - \frac{1}{2} m_w \right)$$

Sposób 3. (zastosowanie układu zastępczego)

Rozważamy układ zastępczy, którego „chwilowa” dynamika jest równoważna dynamice układu opisanego w zadaniu. Załóżmy, że ciężarek jest „doklejony” do walca i znajduje się na wysokości osi walca. Ciężarek traktujemy jako punkt materialny.

Analizujemy „chwilowe” równanie ruchu obrotowego układu. Na taki układ działają momenty dwóch sił: siły $\vec{F}$ oraz siły $\vec{F}_g$ ciężkości „doklejonego” ciężarka. Chwilowy moment bezwładności układu jest sumą momentów bezwładności walca oraz ciężarka.

Zapiszemy chwilowe równanie ruchu obrotowego dla takiego układu:

$$(I_0 + I_c)\epsilon = F_g R - FR$$

Podstawimy odpowiednie wzory, wykonamy przekształcenia i wyznaczymy F:

$$\left(\frac{1}{2}m_w R^2 + m_c R^2\right)\frac{a}{R} = m_c g R - FR$$

$$\frac{1}{2}m_w a + m_c a = m_c g - F$$

$$\frac{1}{2}m_w \frac{1}{2}g + m_c \frac{1}{2}g = m_c g - F$$

$$\frac{1}{4}m_w g - \frac{1}{2}m_c g = -F$$

$$F = \frac{1}{2}m_c g - \frac{1}{4}m_w g = \frac{1}{2}g\left(m_c - \frac{1}{2}m_w\right)$$

