Zadanie 4. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Budowa prostych modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk.	Zdający: 6.1) analizuje ruch pod wpływem sił sprężystych (harmonicznych) […]; 6.3) oblicza okres drgań ciężarka na sprężynie […]; 8.11) (G) zapisuje wynik pomiaru lub obliczenia fizycznego jako przybliżony.

Schemat punktowania

4 p. – prawidłowa metoda obliczenia ilorazu częstotliwości oraz prawidłowy wynik liczbowy zapisany bez jednostki i podany z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

3 p. – prawidłowa metoda i otrzymanie wyniku liczbowego w postaci $f_1/f_2 = \sqrt{3/2}$ lub podanie wyniku z dokładnością inną niż zapisana w poleceniu (np.: $f_1/f_2 \approx 1{,}2247$ lub $f_1/f_2 \approx 1{,}22$) albo wyniku źle zaokrąglonego (np. $f_1/f_2 \approx 1{,}224$).

2 p. – wykonanie *kroku 1.a.* oraz wykonanie *kroku 1.b.* dla obu układów sprężyn – wystarczy zapis: $2\pi f_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ oraz $2\pi f_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

1 p. – prawidłowe wyznaczenie zastępczego współczynnika sprężystości dla układu trzech, a następnie dwóch sprężyn – wystarczy zapis: $k_1 = 3k$ i $k_2 = 2k$ *(krok 1.a.)*
lub
– prawidłowe wyznaczenie siły wypadkowej działającej na pręt zawieszony na trzech, a następnie na dwóch sprężynach – wystarczy zapis: $\vec{F}_1 = -3k\vec{y}$ i $\vec{F}_2 = -2k\vec{y}$ *(krok 1.a.)*
lub
– skorzystanie ze wzoru na częstotliwość lub częstość kołową drgań układu sprężyn wraz z uwzględnieniem rozróżnienia zastępczych współczynników sprężystości obu układów sprężyn – wystarczy zapis: $2\pi f_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ albo $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ albo $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ *(krok 1.b.)*
lub
– skorzystanie ze wzoru na okres drgań układu sprężyn łącznie ze związkiem okresu z częstotliwością wraz z uwzględnieniem rozróżnienia zastępczych współczynników sprężystości dla obu układów sprężyn – np. zapis $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ oraz $f_1 = \frac{1}{T_1}$ *(krok 1.b.)*

0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Uwaga! Uwzględnienie rozróżnienia współczynników sprężystości obu układów sprężyn należy uznać wtedy, gdy zastosowano oznaczenie indeksem, np.: $2\pi f_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ *albo wtedy, gdy zapisano wzór ogólny, np.:* $2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$*, a następnie wyznaczano k lub rozpisywano ten wzór dla każdego z układów sprężyn.*

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1.

Krok 1.a. Wyznaczamy zastępczy współczynnik sprężystości dla układu trzech, a następnie dwóch sprężyn. Wszystkie sprężyny wychylają się z położenia równowagi sił o tę samą wartość *y*, zatem wypadkowa siła działająca na pręt ma postać:

$$\vec{F}_1 = -(k\vec{y} + k\vec{y} + k\vec{y}) = -3k\vec{y}$$

Widzimy, że siła wypadkowa ma charakter siły harmonicznej:

$$\vec{F}_1 = -k_1\vec{y} \quad \text{dla} \quad k_1 = 3k$$

Podobnie określamy „zastępczy" współczynnik sprężystości dla układu z usuniętą środkową sprężyną:

$$\vec{F}_2 = -(k\vec{y} + k\vec{y}) = -2k\vec{y} = -k_2\vec{y} \qquad \rightarrow \qquad k_2 = 2k$$

Krok 1.b. Skorzystamy ze wzoru na częstotliwość lub częstość kołową drgań i zastosujemy go dla obu układów sprężyn:

$$2\pi f_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \text{oraz} \quad 2\pi f_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Krok 2. Obliczymy iloraz częstotliwości drgań:

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{3k}{2k}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Krok 3. Zapiszemy wynik z dokładnością do czterech cyfr znaczących:

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2247 \ldots \approx 1{,}225$$

Sposób 2.

Krok 1.a. Skorzystamy ze wzoru na całkowitą energię mechaniczną oscylatora. Energia ta jest równa energii potencjalnej sprężystości oscylatora przy maksymalnym wychyleniu. Niech A_1 oznacza amplitudę drgań układu trzech sprężyn, k – współczynnik sprężystości jednej sprężyny, k_1 – współczynnik sprężystości układu trzech sprężyn. Analogiczne oznaczenia: A_2 i k_2 zastosujemy dla układu drgań dwóch sprężyn. Całkowita energia mechaniczna E_1 drgań układu trzech sprężyn jest równa sumie całkowitych energii mechanicznych drgań każdej ze sprężyn:

$$E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 + \frac{1}{2}kA_1^2 + \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 3kA_1^2 \qquad \text{a ponadto} \qquad E_1 = \frac{1}{2}k_1A_1^2$$

W związku z powyższym mamy:

$$k_1 = 3k$$

Analogiczne obliczenia wykonujemy dla układu dwóch sprężyn:

$$E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2 + \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 2kA_2^2 \qquad \text{a ponadto} \qquad E_2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2$$

zatem

$$k_2 = 2k$$

Dalsze obliczenia wykonujemy jak w pierwszym sposobie rozwiązania.

Uwaga! W tej metodzie dopuszcza się założenie, że: $A_1 = A_2$. W takim przypadku należy uznać wynikający z tego zapis: $E_1/E_2 = k_1/k_2 = 3/2$ jako równoważny zapisom w kroku 1.a.