## Zadanie 4.1. (0–1)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.<br><br>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. | Zdający:<br>IV.4) wskazuje siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po orbicie kołowej, oblicza wartość prędkości na orbicie kołowej o dowolnym promieniu; omawia ruch satelitów wokół Ziemi;<br>IV.7) oblicza zmiany energii potencjalnej grawitacji i stosuje zasadę zachowania energii do ruchu pod wpływem siły grawitacji […]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

## Zadanie 4.2. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. | Zdający:<br>IV.3) analizuje jakościowo wpływ siły grawitacji Słońca na niejednostajny ruch planet po orbitach eliptycznych i siły grawitacji planet na ruch ich księżyców;<br>IV.4) wskazuje siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po orbicie kołowej, oblicza wartość prędkości na orbicie kołowej o dowolnym promieniu; omawia ruch satelitów wokół Ziemi. |

**Zasady oceniania**

(dla rozwiązania sposobem 1A lub 1B)

3 pkt – poprawna metoda ustalenia, który z satelitów ma prędkość o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ **oraz** zapisanie poprawnej odpowiedzi.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości orbitalnej satelity S1 **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką

***LUB***

– zapisanie równania, z którego można wyznaczyć prędkość orbitalną satelity S1 (siła grawitacji jako dośrodkowa, lub bezpośredni wzór na prędkość orbitalną) **oraz** wykazanie, że dla prędkości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ równanie nie jest spełnione.

1 pkt – zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji jako siłę dośrodkową (lub przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne / natężenie pola grawitacyjnego) **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły (lub przyśpieszenia / natężenia pola), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{mv_{1P}^2}{r_P} = \frac{GM_Z m}{r_P^2}$$

***LUB***

– skorzystanie ze wzoru na prędkość orbitalną satelity S1 z uwzględnieniem (np. poprzez oznaczenia lub wartości danych liczbowych) promienia orbity $r_P$ orbity S1 i masy $M_Z$ Ziemi w tym wzorze, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_{1P} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r_P}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania**

(dla rozwiązania sposobem 2A lub 2B)

3 pkt – poprawna metoda ustalenia, który z satelitów ma prędkość o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ **oraz** zapisanie poprawnej odpowiedzi.

2 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zasadę zachowania momentu pędu dla satelity S2 (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu satelity S2 w punktach $P$ i $A$) **oraz** wykorzystanie wzorów na energie mechaniczne i momenty pędu w punktach $P$ i $A$ **oraz** podstawienie wszystkich wartości liczbowych w celu sprawdzenia, czy dla prędkości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ równania są spełnione

***LUB***

– zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zasadę zachowania momentu pędu dla satelity S2 (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu satelity S2 w punktach $P$ i $A$) **oraz** wykorzystanie wzorów na energie mechaniczne i momenty pędu w punktach $P$ i $A$ **oraz** poprawne wyprowadzenie wzoru na wartość prędkości satelity S2 w punkcie $P$, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\begin{cases} \frac{mv_{2P}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_P} = \frac{mv_{2A}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_A} \\ mv_{2P}r_P = mv_{2A}r_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_{2P} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_A}{r_P}}$$

***LUB***

– zapisanie bezpośredniego wzoru na prędkość S2 w punkcie $P$ orbity **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką, np. zapisy równoważne poniższym

$$v_{2P} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_A}{r_P}} \qquad \rightarrow \qquad v_{2P} \approx 6{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

1 pkt – zapisanie równań wyrażających zasadę zachowania energii mechanicznej **oraz** zasadę zachowania momentu pędu dla satelity S2 (tzn. przyrównanie energii mechanicznych oraz momentów pędu satelity S2 w punktach $P$ i $A$), **oraz** wykorzystanie wzorów na energie mechaniczne albo na momenty pędu w punktach $P$ i $A$, np. zapisy równoważne poniższym:

$E_{2P} = E_{2A}$ oraz $mv_{2P}r_P = mv_{2A}r_A$

albo

$$\frac{mv_{2P}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_P} = \frac{mv_{2A}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_A} \quad \text{oraz} \quad L_{2P} = L_{2A}$$

***LUB***

– zapisanie bezpośredniego wzoru (bez wyprowadzenia) na prędkość S2 w punkcie $P$ orbity, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_{2P} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_A}{r_P}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Sposób 1A.

Obliczymy wartość $v_{1P}$ prędkości, z jaką satelita S1 porusza się po orbicie kołowej o promieniu $r_P$. Skorzystamy z faktu, że siła grawitacji działająca na S1 jest siłą dośrodkową:

$$\frac{mv_{1P}^2}{r_P} = \frac{GM_Z m}{r_P^2} \qquad \rightarrow \qquad v_{1P} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r_P}}$$

$$v_{1P} = \sqrt{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}5 \cdot 10^{7}\ \text{m}}} \approx 5{,}15 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5{,}15\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Wartość prędkości satelity S1 w punkcie $P$ jest równa $5{,}15\ \text{km/s}$ co oznacza, że prędkość o wartości $6{,}3\ \text{km/s}$ musi mieć satelita S2.

Sposób 1B.

Zapiszemy równanie wynikające z faktu, że siła grawitacji działająca na satelitę S1 jest siłą dośrodkową:

$$\frac{mv_{1P}^2}{r_P} = \frac{GM_Z m}{r_P^2} \qquad \rightarrow \qquad v_{1P}^2 = \frac{GM_Z}{r_P}$$

Sprawdzimy, czy równanie jest spełnione dla $v_{1P} = 6{,}3\ \mathrm{km/s}$. Podstawimy dane liczbowe i obliczymy lewą oraz prawą stronę równania:

$$LSR = \left(6{,}3 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 40 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$PSR = \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{1{,}5 \cdot 10^7\ \mathrm{m}} \approx 27 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Z obliczeń wynika, że równanie dla $v_{1P} = 6{,}3\ \mathrm{km/s}$ nie jest spełnione:

$$LSR \neq PSR$$

Zatem satelita S1 nie może mieć prędkości o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$. Z warunków zadania (jeden z satelitów ma prędkość $6{,}3\ \mathrm{km/s}$) wynika, że prędkość o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ musi mieć satelita S2.

Sposób 2A.

Obliczymy wartość $v_{2P}$ prędkości, jaką ma satelita S2 w punkcie P. Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej oraz zasadę zachowania momentu pędu dla satelity S2. Przyrównamy te wielkości w punktach $P$ i $A$ orbity eliptycznej:

$$\begin{cases} E_{2P} = E_{2A} \\ L_{2P} = L_{2A} \end{cases}$$

Do powyższego układu równań podstawimy odpowiednie wzory na energię mechaniczną i moment pędu, następnie przekształcimy układ równań i wyznaczymy $v_{2P}$.

$$\begin{cases} \frac{mv_{2P}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_P} = \frac{mv_{2A}^2}{2} - \frac{GM_Z m}{r_A} \\ mv_{2P} r_P = mv_{2A} r_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_{2P}^2 - \frac{(v_{2P} r_P)^2}{r_A^2} = \frac{2GM_Z}{r_P} - \frac{2GM_Z}{r_A}$$

$$v_{2P}^2 \left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = 2GM_Z \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) \quad \rightarrow \quad v_{2P}^2 \left(\frac{r_A^2 - r_P^2}{r_A^2}\right) = 2GM_Z \left(\frac{r_A - r_P}{r_A r_P}\right)$$

$$v_{2P}^2 \left(\frac{r_A + r_P}{r_A}\right) = 2GM_Z \left(\frac{1}{r_P}\right) \qquad \rightarrow$$

$$v_{2P} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{(r_A + r_P)} \cdot \frac{r_A}{r_P}} \qquad \rightarrow$$

$$v_{2P} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(1{,}5 + 3 \cdot 1{,}5) \cdot 10^7\ \mathrm{m}} \cdot \frac{3}{1}} \approx 6{,}31 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Prędkość o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$ w punkcie $P$ ma satelita S2.

Sposób 2B.

Zapiszemy równania wynikające z zasady zachowania energii mechanicznej oraz zasady zachowania momentu pędu dla satelity S2. Przyrównamy te wielkości w punktach $P$ i $A$ orbity eliptycznej:

$$\begin{cases} E_{2P} = E_{2A} \\ L_{2P} = L_{2A} \end{cases}$$

Do powyższego układu równań podstawimy odpowiednie wzory na energię mechaniczną i moment pędu, następnie przekształcimy te równania do prostszej postaci:

$$\begin{cases} \frac{mv_{2P}^2}{2} - \frac{GM_z m}{r_P} = \frac{mv_{2A}^2}{2} - \frac{GM_z m}{r_A} \\ mv_{2P}r_P = mv_{2A}r_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_{2P}^2 - \frac{(v_{2P}r_P)^2}{r_A^2} = \frac{2GM_z}{r_P} - \frac{2GM_z}{r_A}$$

$$v_{2P}^2\left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = 2GM_z\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Sprawdzimy, czy równanie jest spełnione dla $v_{2P} = 6{,}3\ \mathrm{km/s}$. Podstawimy dane liczbowe i obliczymy lewą oraz prawą stronę równania:

$$LSR = \left(6{,}3 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \approx 35 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$PSR = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{10^7\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{4{,}5}\right) \approx 35 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Z obliczeń wynika, że równanie dla $v_{2P} = 6{,}3\ \mathrm{km/s}$ jest spełnione:

$$LSR = PSR$$

Zatem satelita S2 ma prędkość o wartości $6{,}3\ \mathrm{km/s}$.

**Zadanie 4.3. (0–3)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych i źródeł internetowych, oraz ocenianie wiarygodności źródeł.<br><br>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. | Zdający:<br>I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych;<br>I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; […].<br>IV.5) […] stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych i eliptycznych. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu okresów obiegu satelitów S1 i S2 dookoła Ziemi

**oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego: $\frac{T_1}{T_2} \approx 0{,}35$

2 pkt – zapisanie równania III prawa Keplera (dla satelitów S1 i S2) z uwzględnieniem okresów obiegu S1 i S2 dookoła Ziemi, półosi wielkiej orbity S2, promienia orbity S1 **oraz** poprawna metoda obliczenia długości półosi wielkiej orbity eliptycznej satelity S2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{T_1^2}{r_P^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \text{oraz} \quad 2a_2 = r_P + r_A$$

albo

$$\frac{T_1^2}{r_P^3} = \frac{T_2^2}{\left(\frac{r_P + r_A}{2}\right)^3}$$

1 pkt – zapisanie równania III prawa Keplera (dla satelitów S1 i S2) z uwzględnieniem okresów obiegu S1 i S2 dookoła Ziemi, półosi wielkiej orbity S2, promienia orbity S1, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{T_1^2}{r_P^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

***LUB***

– poprawna metoda obliczenia długości półosi wielkiej orbity eliptycznej satelity S2, np. zapisy równoważne poniższym:

$$2a_2 = r_P + r_A$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Satelity S1 oraz S2 obiegają Ziemię – wspólne centrum grawitacyjne. Zatem iloraz okresów obiegu S1 i S2 dookoła Ziemi obliczymy z III prawa Keplera:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3}$$

gdzie $a_2$ jest długością półosi wielkiej dla okołoziemskiej, eliptycznej orbity satelity S2, natomiast $a_1$ jest promieniem dla okołoziemskiej, kołowej orbity satelity S1:

$$a_1 = r_P$$

Obliczymy $a_2$:

$$a_2 = \frac{r_P + r_A}{2} \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{r_P + 3r_P}{2} = 2r_P$$

Podstawimy dane do równania wynikającego z III prawa Keplera:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{r_P}{2r_P}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \approx 0{,}35$$