Zadanie 5.1. (0–3)

Schemat punktowania

3 p. – prawidłowa metoda obliczenia okresu obiegu stacji dookoła Ziemi oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką (*krok 3.*).

2 p. – doprowadzenie do wyrażenia, z którego można obliczyć okres obiegu stacji dookoła Ziemi na podstawie promienia orbity stacji oraz stałych, łącznie z prawidłowym podstawieniem odpowiednich danych do wzoru (*krok 2.*).

1 p. – zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, z uwzględnieniem wzorów na te siły (*krok 1.*)
lub
– skorzystanie ze wzoru na prędkość orbitalną, łącznie z zastosowaniem wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu (*krok 1.*).

0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób 1.

Krok 1. Zapiszemy równanie identyfikujące siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, łącznie z uwzględnieniem wzorów na te siły:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \qquad \text{gdzie} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

Krok 2. Wyprowadzamy wzór pozwalający na obliczenie okresu obiegu stacji dookoła Ziemi oraz podstawiamy do wzoru odpowiednie dane:

$$m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}=\frac{GmM}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$T=6{,}28\cdot\sqrt{\frac{(3\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ \text{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\ \text{kg}}}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia:

$$T=6{,}28\cdot\sqrt{\frac{(3\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ \text{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\ \text{kg}}}=6{,}28\cdot\sqrt{175{,}26\cdot 10^5\ \frac{\text{m}\cdot\text{kg}}{\text{N}}}$$

$$T=6{,}28\cdot\sqrt{1752{,}6\cdot 10^4\ \frac{\text{m}\cdot\text{kg}}{\text{N}}}\approx 263\cdot 10^2\ \text{s}\approx 26\,300\ \text{s}$$

Sposób 2.

Krok 1. Zapiszemy równanie identyfikujące siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, łącznie z uwzględnieniem wzorów na te siły:

$$m\omega^2 r=\frac{GmM}{r^2} \qquad \text{gdzie} \quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

Krok 2. Wyprowadzamy wzór pozwalający na obliczenie okresu obiegu stacji dookoła Ziemi oraz podstawiamy do wzoru odpowiednie dane.

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Wykorzystamy fakt, że:

$$GM_z=gR_Z^2$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR_Z^2}}=2\pi\sqrt{\frac{27R_z}{g}}=6\pi\sqrt{\frac{3R_z}{g}}\approx 18{,}84\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}\approx 26{,}3\cdot 10^3\ \text{s}$$

Zadanie 5.2. (0–1)

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – brak spełnienia powyższego kryterium.

Poprawna odpowiedź
A

Zadanie 5.3. (0–2)

Schemat punktowania

2 p. – prawidłowa metoda i prawidłowy wynik liczbowy z jednostką.

1 p. – przyrównanie energii mechanicznej do zera łącznie z zastosowaniem wzorów na energię kinetyczną i potencjalną

lub

– zastosowanie wzoru na prędkość ucieczki łącznie z prawidłową identyfikacją wielkości.

0 p. – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie

Skorzystamy z zasady zachowania energii (w punkcie *p* i w nieskończoności) i faktu, że energia mechaniczna w nieskończoności musi być co najmniej zero:

$$E_{mech}(p) = E_{mech\infty} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{GMm}{r(p)} + \frac{1}{2}mv_u^2(p) = 0 \quad \xrightarrow{r(p)=3R_Z} \quad v_u(p) = \sqrt{\frac{2GM}{3R_Z}}$$

Wykonujemy obliczenia:

$$v_u(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^{6}\ \text{m}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 7{,}91 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 6{,}46 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$