Zadanie 5. (0–4)

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pracy siły ciągu oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką.

3 pkt – poprawne wyprowadzenie wyrażenia na pracę siły ciągu: $W_{F_c} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ oraz zapisanie związku między masą planety, jej promieniem a przyśpieszeniem grawitacyjnym na powierzchni planety: $g_p = \frac{GM}{R^2}$

LUB

– poprawne wyprowadzenie wyrażenia na pracę siły ciągu za pomocą wielkości danych w zadaniu: $W_{F_c} = \frac{mg_pR^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

2 pkt – zapisanie pracy siły ciągu jako różnicy energii mechanicznych oraz zapisanie energii mechanicznej jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej grawitacji oraz identyfikacja siły grawitacji jako siły dośrodkowej (lub zapisanie wzoru na prędkość orbitalną)

LUB

– zapisanie pracy siły ciągu jako różnicy energii mechanicznych oraz zapisanie energii mechanicznej jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej grawitacji oraz zapisanie związku między masą planety, jej promieniem a przyśpieszeniem grawitacyjnym na powierzchni planety

LUB

– poprawne wyprowadzenie związku: $W_{F_c} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

1 pkt – zapisanie pracy siły ciągu jako różnicy energii mechanicznych oraz zapisanie energii mechanicznej jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej grawitacji

LUB

– zapisanie energii mechanicznej jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej grawitacji oraz identyfikacja siły grawitacji jako siły dośrodkowej.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

Przykładowe rozwiązanie

Praca, jaką wykonała siła ciągu silników podczas przemieszczania sondy z jednej orbity na drugą, jest równa różnicy energii mechanicznych, jakie ma sonda, gdy porusza się swobodnie po tych orbitach:

$$W_{F_c} = E_2 - E_1$$

Wyprowadzimy wyrażenie na energię mechaniczną, gdy sonda porusza się swobodnie z prędkością v po orbicie kołowej, w ogólności o promieniu r (tutaj r_1 lub r_2). Energia mechaniczna jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

Ponadto siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \rightarrow \quad mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

Powyższy związek podstawimy do wzoru na energię mechaniczną:

$$E = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Otrzymany wzór wykorzystamy do obliczenia pracy siły ciągu:

$$W_{F_c} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_2} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Zapiszemy związek między masą planety, jej promieniem a przyśpieszeniem grawitacyjnym na powierzchni planety:

$$g_p = \frac{GM}{R^2} \quad \rightarrow \quad GM = g_p R^2$$

Zatem:

$$W_{F_c} = \frac{mg_p R^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$W_{F_c} = \frac{4 \cdot 10^2\ \text{kg} \cdot 25\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (8 \cdot 10^6)^2\ \text{m}^2}{2}\left(\frac{1}{12 \cdot 10^6\ \text{m}} - \frac{1}{36 \cdot 10^6\ \text{m}}\right) \approx\ 178 \cdot 10^8\ \text{J}$$

$$W_{F_c} \approx 178 \cdot 10^8\ \text{J} = 17{,}8 \cdot \text{GJ}$$