Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: IV.4) wskazuje siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po orbicie kołowej, oblicza wartość prędkości na orbicie kołowej o dowolnym promieniu […]; IV.7) oblicza zmiany energii potencjalnej grawitacji i stosuje zasadę zachowania energii do ruchu pod wpływem siły grawitacji; posługuje się pojęciem drugiej prędkości kosmicznej (prędkości ucieczki).

Zasady oceniania

Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek RÓŻNICA

Zapisanie różnicy:

$$\Delta v_A = v_A - v_{or\,A}$$

Warunek ZZE

Zapisanie zasady zachowania energii mechanicznej (symbolicznie lub słownie) z uwzględnieniem (poprzez oznaczenie) energii mechanicznej sondy na orbicie po zwiększeniu prędkości i energii mechanicznej sondy poza sferą oddziaływania ze Słońcem, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{mech\,r_A} = E_{mech\,\infty\,A}$$

Warunek ZZE_kin_pot
Zapisanie równania zasady zachowania energii mechanicznej z uwzględnieniem (wystarczy poprzez oznaczenie) energii kinetycznej sondy na orbicie po zwiększeniu prędkości, energii potencjalnej sondy na orbicie i energii kinetycznej sondy poza sferą oddziaływania ze Słońcem, np. zapisy równoważne poniższym:

$$E_{kin\,r_A} + E_{pot\,r_A} = E_{kin\,\infty\,A}$$

Warunek ZZE_wzory
Zapisanie równania zasady zachowania energii mechanicznej **oraz** uwzględnienie w nim wzorów na energię kinetyczną sondy na orbicie po zwiększeniu prędkości, wzorów na energię potencjalną sondy na orbicie i wzorów na energię kinetyczną sondy poza sferą oddziaływania ze Słońcem, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 - \frac{GM_S m_A}{r_A} = \frac{1}{2}m_A v_{\infty\,A}^2$$

Warunek Fdo=Fg
Zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na sondę poruszającą się swobodnie po orbicie kołowej jako siłę dośrodkową (lub relacji identyfikującej przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne), np. zapisy równoważne poniższym:

$$F_{do\,A} = F_g$$

Warunek Fdo=Fg_wzory
Zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na sondę poruszającą się swobodnie po orbicie kołowej jako siłę dośrodkową (lub relacji identyfikującej przyśpieszenie dośrodkowe jako przyśpieszenie grawitacyjne) **oraz** uwzględnienie wzorów na te siły (lub przyśpieszenia), np. zapisy równoważne poniższym:

$$m_A\frac{v_{or\,A}^2}{r_A} = \frac{GM_S m_A}{r_A^2} \quad \text{albo} \quad \frac{v_{or\,A}^2}{r_A} = \frac{GM_S}{r_A^2}$$

albo

zapisanie wzoru na prędkość (lub jej kwadrat) orbitalną wynikającego z powyższej relacji, np. zapisy równoważne poniższym:

$$v_{or\,A}^2 = \frac{GM_S}{r_A} \quad \text{albo} \quad v_{or\,A} = \sqrt{\frac{GM_S}{r_A}}$$

Warunek VA
Spełnienie warunków **ZZE_wzory oraz Fdo=Fg_wzory**, **oraz** wyprowadzenie i zapisanie równania, z którego można wyznaczyć v_A w zależności tylko od v_{orA} i $v_{\infty A}$, np. zapisy równoważne poniższym:

ZZE_wzory oraz Fdo=Fg_wzory $\rightarrow$ $\frac{1}{2}v_A^2 - v_{or\,A}^2 = \frac{1}{2}v_{\infty\,A}^2$

Schemat punktowania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia Δv_A w zależności tylko od v_{orA} i $v_{\infty A}$ **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na Δv_A:

metoda → $\Delta v_A = \sqrt{2 \cdot v_{or\,A}^2 + v_{\infty\,A}^2} - v_{or\,A}$

3 pkt – spełnienie warunku **VA**

LUB

– spełnienie warunków: **ZZE_wzory oraz Fdo=Fg_wzory oraz RÓŻNICA**

2 pkt – spełnienie warunków: **ZZE_wzory oraz RÓŻNICA**

LUB

– spełnienie warunków: **ZZE_kin_pot oraz Fdo=Fg**

LUB

– spełnienie warunków: **Fdo=Fg_wzory oraz RÓŻNICA**

1 pkt – spełnienie warunków: **ZZE oraz RÓŻNICA**

LUB

– spełnienie warunku **ZZE_kin_pot**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapiszemy wzór na zmianę wartości prędkości sondy o Δv_A (w kierunku stycznym do orbity):

$$1) \quad \Delta v_A = v_A - v_{or\,A}$$

Wyznaczymy v_A – wartość prędkości, jaką musi mieć sonda (po wyłączeniu silników), aby z punktu orbity odległego od środka Słońca o r_A mogła uciec z pola grawitacyjnego Słońca i nieskończenie daleko od Słońca poruszać się z prędkością o wartości $v_{\infty A}$.

Wykorzystamy zasadę zachowania energii mechanicznej dla sondy. Energia mechaniczna $E_{mech\,r_A}$ sondy w punkcie orbity, ale po zwiększeniu prędkości i wyłączeniu silników, jest równa energii mechanicznej $E_{mech\,\infty\,A}$ sondy poza sferą oddziaływania Słońca:

$$2) \quad E_{mech\,r_A} = E_{mech\,\infty\,A}$$

Energia $E_{mech\,r_A}$ sondy jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej, natomiast energia $E_{mech\,\infty\,A}$ jest równa tylko energii kinetycznej, jaką uzyska sonda poza sferą oddziaływania ze Słońcem:

$$3) \quad E_{kin\,r_A} + E_{pot\,r_A} = E_{kin\,\infty\,A}$$

Wykorzystamy wzór na energię kinetyczną oraz wzór na energię potencjalną:

$$4a) \quad \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{G M_S m_A}{r_A} = \frac{1}{2} m_A v_{\infty\,A}^2$$

gdzie m_A jest masą sondy, M_S jest masą Słońca. Po przekształceniu równania 4a) otrzymamy:

$$4b) \quad v_A^2 - 2 \cdot \frac{G M_S}{r_A} = v_{\infty\,A}^2$$

Gdy sonda porusza się swobodnie po orbicie kołowej z prędkością $v_{or\,A}$, to siła grawitacji pełni funkcję siły dośrodkowej:

$$5a)\quad \frac{m_A v_{or\,A}^2}{r_A} = \frac{G M_S m_A}{r_A^2} \qquad \rightarrow \qquad 5b)\quad v_{or\,A}^2 = \frac{G M_S}{r_A}$$

Równanie 5b) wykorzystamy w równaniu 4b):

$$6)\quad v_A^2 - 2 \cdot v_{or\,A}^2 = v_{\infty\,A}^2$$

Zatem:

$$7a)\quad v_A^2 = 2 \cdot v_{or\,A}^2 + v_{\infty\,A}^2 \qquad \rightarrow \qquad 7b)\quad v_A = \sqrt{2 \cdot v_{or\,A}^2 + v_{\infty\,A}^2}$$

Wynik z 7b) wykorzystamy w równaniu 1):

$$8)\quad \Delta v_A = \sqrt{2 \cdot v_{or\,A}^2 + v_{\infty\,A}^2} - v_{or\,A}$$