Zadanie 6.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników. I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.	Zdający: I.7) wyodrębnia z […] wykresów […] informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]; przedstawia te informacje w różnych postaciach. VI.10) opisuje związek między temperaturą w skali Kelvina a średnią energią ruchu cząsteczek […]; VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Komentarz do rozwiązania zadania 6.1. (do pierwszego zdania)

Z równania Clapeyrona wynika, że $T \propto pV$. Z treści zadania i wykresu wynika, że ciśnienie jest wprost proporcjonalne do objętości: $p = kV$ dla pewnego k. Zatem $T \propto kV \cdot V \propto V^2$.

Zadanie 6.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) do wyznaczenia parametrów gazu.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne dokończenie zdania: wpisanie prawidłowej wartości ilorazu temperatur:

$6{,}25$ lub $\frac{25}{4}$

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

Iloraz temperatur gazu w stanach B i A jest równy $\frac{T_B}{T_A} =$ $6{,}25$.

Zadanie 6.3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.2) posługuje się […] kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych. VI.3) posługuje się pojęciem energii wewnętrznej; analizuje pierwszą zasadę termodynamiki jako zasadę zachowania energii; VI.8) stosuje pierwszą zasadę termodynamiki do analizy przemian gazowych […]; VI.10) opisuje związek między temperaturą w skali Kelvina a […] energią wewnętrzną gazu doskonałego; VI.11) analizuje wykresy przemian gazu doskonałego; VI.12) stosuje równanie gazu doskonałego […] do wyznaczenia parametrów gazu; VI.13) posługuje się pojęciem ciepła molowego gazu […].

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobem 1.)
Rozwiązanie będzie podlegało ocenie, gdy zdający spełni co najmniej jeden z poniższych warunków lub ich kombinację, określoną dalej w schemacie punktowania.

Warunek IZT
Zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}|$$

Warunek ΔU1
Zapisanie związku między zmianą energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ a przyrostem temperatury, ciepłem molowym przy stałej objętości i liczbą moli, np.:

$$\Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB} \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

Warunek ΔU2
Skorzystanie ze wzoru na energię wewnętrzną wyrażoną przez objętość i ciśnienie **oraz** zapisanie prawidłowej postaci wzoru na przyrost energii wewnętrznej w przemianie $A \to B$ (wyrażonej przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np. zapisy równoważne poniższym:

$$\left(U_A = \frac{3}{2}p_A V_A \quad \text{oraz} \quad U_B = \frac{3}{2}p_B V_B\right) \quad \to \quad \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\left(p_B V_B - p_A V_A\right)$$

Warunek W
Poprawna metoda obliczenia pracy siły parcia w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wzoru na tę pracę (wyrażoną przez objętości i ciśnienia w stanach A i B), np.:

$$|W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) \quad \text{(lub zapisy równoważne)}$$

Warunek ΔT

Poprawna metoda wyznaczenia przyrostu temperatury w przemianie $A \to B$, tzn. wykorzystanie równań Clapeyrona dla stanów A i B, **oraz** zapisanie prawidłowej postaci przyrostu temperatury (albo przyrostu temperatury z czynnikiem nR), np. zapisy równoważne poniższym:

$$(p_A V_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_B V_B = nRT_B) \quad \to \quad nR\Delta T_{AB} = p_B V_B - p_A V_A$$

Schemat punktowania (dla rozwiązania sposobem 1.)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100$ J

3 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU1 oraz ΔT**

LUB

– spełnienie warunków: **IZT oraz W oraz ΔU2**

2 pkt – spełnienie warunków: **IZT oraz ΔU1**

LUB

– spełnienie warunków: **IZT oraz W**

LUB

– spełnienie warunków: **ΔU1 oraz W**

LUB

– spełnienie warunków: (**ΔU1 oraz ΔT**) **albo ΔU2**

1 pkt – spełnienie warunku **IZT**

LUB

– spełnienie warunku **ΔU1**

LUB

– spełnienie warunku **W**

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla rozwiązania sposobami 2A i 2B i podobnymi)

4 pkt – poprawna metoda obliczenia ciepła pobranego w przemianie $A \to B$ **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką: $Q_{AB} = 2\,100$ J

3 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz** poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} i ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} i ΔU_{XB} **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

2 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemian izochorycznej i izobarycznej (jak w obu warunkach za 1 pkt) **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu, **oraz** poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}

ALBO

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla odpowiedniego cyklu **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA} **oraz** poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} oraz ciepła Q_{CA}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** poprawna metoda obliczenia ΔU_{AX} albo ΔU_{XB}

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ **oraz** zapisanie I zasady termodynamiki dla przemiany $A \to B$ z poprawnym uwzględnieniem konwencji znaków (stosowanej konsekwentnie).

1 pkt – założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izochorycznej $B \to C$ i przemiany izobarycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $|Q_{BC}| = \frac{3}{2} nR\Delta T_{BC}$ albo $|Q_{CA}| = \frac{5}{2} nR\Delta T_{CA}$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$

LUB

– założenie, że przemiana $A \to B$ jest częścią cyklu $A \to B \to C \to A$, który składa się z przemiany izobarycznej $B \to C$ i przemiany izochorycznej $C \to A$ **oraz**

- poprawne zapisanie pierwszej zasady termodynamiki dla cyklu, np.:
  $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia ciepła Q_{BC} albo ciepła Q_{CA}, np.:
  $|Q_{BC}| = \frac{5}{2} nR\Delta T_{BC}$ albo $|Q_{CA}| = \frac{3}{2} nR\Delta T_{CA}$
  ALBO
- poprawna metoda obliczenia pracy całkowitej w cyklu, np.:
  $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A)$

LUB

– zauważenie, że dla dowolnej przemiany $A \to X \to B$ i dla przemiany $A \to B$ zachodzi związek: $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (optymalny, z wykorzystaniem IZT i bezpośrednim obliczeniem ΔU_{AB})

Zapiszemy I zasadę termodynamiki dla przemiany termodynamicznej $A \to B$. Zastosujemy konwencję znaków, zgodnie z którą, gdy gaz pobiera energię w formie pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako dodatnie, a gdy traci energię w postaci pracy lub ciepła, to wielkości te oznaczamy jako ujemne. Gaz się rozpręża, więc traci energię w formie pracy i jednocześnie pobiera energię w formie ciepła. Zatem:

$$1)\ \ \Delta U_{AB} = |Q_{AB}| - |W_{AB}| \quad \to \quad 1a)\ \ |Q_{AB}| = \Delta U_{AB} + |W_{AB}|$$

Do wyznaczenia zmiany energii wewnętrznej wykorzystamy związek między energią wewnętrzną a temperaturą:

$$2)\ \ \Delta U_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} \quad \to \quad 2a) \quad \Delta U_{AB} = n\frac{3}{2}R\Delta T_{AB}$$

Przyrost temperatury określimy na podstawie równań Clapeyrona dla stanów A i B:

$$3)\ \ p_A V_A = nRT_A \quad \text{oraz} \quad p_B V_B = nRT_B \quad \to$$

$$4)\ \ nR\Delta T_{AB} = nRT_B - nRT_A = p_B V_B - p_A V_A$$

Równanie 4) wykorzystamy w równaniu 2a):

$$5)\ \ \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = 1\,575\ \text{J}$$

Do wyznaczenia pracy w przemianie $A \to B$ zastosujemy następujący lemat: praca w przemianie termodynamicznej jest równa polu pod wykresem zależności $p(V)$ dla danej przemiany. Zatem:

$$6)\ \ |W_{AB}| = \text{Pole pod } p(V) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = 525\ \text{J}$$

Wzory 5) oraz 6) wykorzystamy we wzorze 1a):

$$7)\ \ |Q_{AB}| = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) + \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$

Do powyższego wzoru podstawimy dane liczbowe i wykonamy obliczenia:

$$8a)\ \ |Q_{AB}| = \left(\frac{3}{2}\cdot(5\cdot 25 - 2\cdot 10) + \frac{1}{2}\cdot(2+5)(25-10)\right)\cdot 10^1\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$8b)\ \ |Q_{AB}| = (157{,}5 + 52{,}5)\cdot 10^1\ \text{J} = 2\,100\ \text{J}$$

Sposób 2A.

Rozważmy taki cykl przemian $A \to B \to C \to A$, w którym:

- przemiana $A \to B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \to C$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_B = 25 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$ oraz $p_A \le p \le p_B$
- przemiana $C \to A$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_A = 2 \cdot 10^4\ \text{Pa}$ oraz $V_A \le V \le V_B$.

W przemianie $A \to B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \to C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \to A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Pracę całkowitą wykonaną przez siłę parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

1) $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$ zatem

2) $|Q_{AB}| = |W_{ABC}| + |Q_{BC}| + |Q_{CA}|$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

3) $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

4) $|Q_{BC}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{3}{2}\Delta p_{BC}V_C = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_B = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 25 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

5) $|Q_{CA}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{CA} = \frac{5}{2}p_A(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

6) $|Q_{AB}| = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + \frac{225}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 75 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$

Sposób 2B.

Rozważmy taki cykl przemian $A \to B \to C \to A$, w którym:

- przemiana $A \to B$ to przemiana opisana w zadaniu
- przemiana $B \to C$ jest izobaryczna, gdzie $p_C = p_B = 5 \cdot 10^4$ Pa oraz $V_A \le V \le V_B$
- przemiana $C \to A$ jest izochoryczna, gdzie $V_C = V_A = 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ oraz $p_A \le p \le p_B$.

W przemianie $A \to B$ gaz pobiera ciepło Q_{AB} z grzejnicy, w przemianie $B \to C$ gaz oddaje ciepło Q_{BC} do chłodnicy, w przemianie $C \to A$ gaz oddaje ciepło Q_{CA} do chłodnicy. Kierunek cyklu odpowiada pompie cieplnej. Pracę całkowitą przeciwko sile parcia w całym cyklu oznaczymy jako W_{ABC}. Zmiana energii wewnętrznej w całym cyklu wynosi zero, zatem na mocy I zasady termodynamiki mamy:

1) $0 = |Q_{AB}| - |Q_{BC}| - |Q_{CA}| + |W_{ABC}|$

zatem:

2) $|Q_{AB}| = |Q_{BC}| + |Q_{CA}| - |W_{ABC}|$

Obliczymy pracę jako pole obszaru ograniczonego figurą wykresu:

3) $|W_{ABC}| = \frac{1}{2}(p_B - p_A)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot (25-10)\ 10^1\ \mathrm{J} = \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Obliczymy Q_{BC}, wykorzystamy przy tym równanie Clapeyrona:

4) $|Q_{BC}| = \frac{5}{2}nR\Delta T_{BC} = \frac{5}{2}p_C\Delta V_{BC} = \frac{5}{2}p_B(V_B - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot (25-10) \cdot 10^1\ \mathrm{J} = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Podobnie obliczymy Q_{CA}:

5) $|Q_{CA}| = \frac{3}{2}nR\Delta T_{CA} = \frac{3}{2}\Delta p_{CA}V_A = \frac{3}{2}(p_B - p_A)V_A = \frac{3}{2} \cdot (5-2) \cdot 10 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J}$

Wyniki z równań 3) i 4) i 5) podstawiamy do równania 2):

6) $|Q_{AB}| = \frac{375}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} + 45 \cdot 10^1\ \mathrm{J} - \frac{45}{2} \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 210 \cdot 10^1\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$

Inne, podobne sposoby rozwiązania

Zadanie można rozwiązać sposobem, w którym zmianę energii wewnętrznej ΔU_{AB} oblicza się jako sumę zmian energii wewnętrznych $\Delta U_{AX} + \Delta U_{XB}$ w przemianach $A \to X$ (izobarycznej lub izochorycznej) oraz $X \to B$ (izochorycznej lub izobarycznej). Ten sposób niepotrzebnie wydłuża obliczenie zmiany energii wewnętrznej ΔU_{AB} (porównaj ze sposobem 1.)