Zadanie 8.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych.	Zdający: IV.5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne uporządkowanie rosnąco promieni orbit księżyców Jowisza.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$$\ldots\ldots r_I \ldots\ldots < \ldots\ldots r_E \ldots\ldots < \ldots\ldots r_G \ldots\ldots < \ldots\ldots r_K \ldots\ldots$$

Zadanie 8.2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: IV.5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu promieni orbit Ganimedesa i Io **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego.

1 pkt – poprawne zapisanie równania III prawa Keplera dla ruchu orbitalnego Ganimedesa oraz Io dookoła Jowisza (za pomocą symboli użytych w treści zadania albo liczb i symboli albo innych oznaczeń jednoznacznie opisanych w rozwiązaniu).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykorzystamy III prawo Keplera dla ruchu orbitalnego Ganimedesa oraz Io dookoła Jowisza:

$$\frac{T_G^2}{r_G^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{r_G}{r_I}\right)^3 = \left(\frac{T_G}{T_I}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{r_G}{r_I} = \left(\frac{T_G}{T_I}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_G}{T_I}\right)^2}$$

$$\frac{r_G}{r_I} = \sqrt[3]{\left(\frac{4{,}0}{1{,}0}\right)^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}5$$

Poniżej podajemy do wiadomości okresy i promienie orbit księżyców Jowisza wymienionych w zadaniu:

$T_I = 1{,}769\ \text{d}$ $T_E = 3{,}551\ \text{d}$ $T_G = 7{,}155\ \text{d}$ $T_K = 16{,}689\ \text{d}$

$r_I = 421\,800\ \text{km}$ $r_E = 671\,100\ \text{km}$ $r_G = 1\,070\,000\ \text{km}$ $r_K = 1\,883\,000\ \text{km}$

Zadanie 8.3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych.	Zdający: IV.4) wskazuje siłę grawitacji jako siłę dośrodkową w ruchu po orbicie kołowej, oblicza wartość prędkości na orbicie kołowej o dowolnym promieniu […]; IV.5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia masy Jowisza (np. jak w krokach 1.–3.) **oraz** podanie prawidłowego wyniku liczbowego z jednostką.

2 pkt – doprowadzenie do jednego wyrażenia, z którego można bezpośrednio obliczyć masę Jowisza jedynie na podstawie stałych oraz promienia orbity r_E i okresu T_E (np. zapisanie wyrażenia jak w kroku 2.)
LUB
– zapisanie (od razu bez wyprowadzenia) III prawa Keplera łącznie z poprawnie określoną stałą: $\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ **oraz** zidentyfikowanie wielkości w tym wzorze (np. poprzez użycie odpowiednich symboli z indeksami lub opis użytych symboli lub podstawienie wartości liczbowych).

1 pkt – zapisanie relacji identyfikującej siłę grawitacji działającą na księżyc Europa jako siłę dośrodkową, z uwzględnieniem wzorów na te siły (np. jak w kroku 1. w sposobie 1.)
LUB
– skorzystanie ze wzoru na prędkość orbitalną, łącznie z zastosowaniem wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu (np. jak w kroku 1. w sposobie 2.).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Krok 1. Zapiszemy równanie identyfikujące siłę grawitacji jako siłę dośrodkową, łącznie z uwzględnieniem wzorów na te siły:

$$m_E \frac{v_E^2}{r_E} = \frac{G m_E M}{r_E^2}$$

Krok 2. Wyprowadzimy wyrażenie pozwalające na bezpośrednie obliczenie masy Jowisza z parametrów ruchu orbitalnego księżyca. W tym celu do powyższego równania podstawimy wzór na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu: $v_E = \frac{2\pi r_E}{T_E}$.

$$m_E \frac{\left(\frac{2\pi r_E}{T_E}\right)^2}{r_E} = \frac{G m_E M}{r_E^2} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r_E}{T_E^2} = \frac{GM}{r_E^2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r_E^3}{T_E^2}$$

Do otrzymanego wyrażenia podstawiamy parametry ruchu orbitalnego Europy:

$$r_E \approx 6{,}711 \cdot 10^5 \ \text{km} \qquad T_E \approx 3{,}551 \ \text{dób ziemskich}$$

Zatem

$$M = \frac{4 \cdot (3{,}142)^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}} \cdot \frac{(6{,}711 \cdot 10^5 \ \text{km})^3}{(3{,}551 \ \text{dób})^2}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia, przy czym kilometry wyrazimy w metrach, a dobę wyrazimy sekundach.

$$M = \frac{4 \cdot (3{,}142)^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}} \cdot \frac{(6{,}711 \cdot 10^8 \ \text{m})^3}{(3{,}551 \cdot 2{,}4 \cdot 10^1 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \ \text{s})^2} \approx 1{,}899848 \ldots \cdot 10^{27} \ \text{kg}$$

$$M \approx 1{,}90 \cdot 10^{27} \ \text{kg}$$

Sposób 2.

Krok 1. Skorzystamy ze wzoru na prędkość w ruchu po orbicie kołowej oraz zastosujemy wzór na prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu.

$$v_E = \sqrt{\frac{GM}{r_E}} \qquad v_E = \frac{2\pi r_E}{T_E}$$

Krok 2. Z powyższych równań wyprowadzamy wzór pozwalający na obliczenie masy Jowisza z parametrów ruchu orbitalnego księżyca Europa:

$$\frac{2\pi r_E}{T_E} = \sqrt{\frac{GM}{r_E}} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r_E^2}{T_E^2} = \frac{GM}{r_E} \quad \rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r_E^3}{T_E^2}$$

Krok 3. Wykonujemy obliczenia (patrz krok 3. w sposobie 1.).