Zadanie 8.1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.6) tworzy [..] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk […]; I.7) wyodrębnia z tekstów […], rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska […]; I.19) tworzy modele fizyczne lub matematyczne wybranych zjawisk i opisuje ich założenia; ilustruje prawa i zależności fizyczne z wykorzystaniem tych założeń. IX.2) (SP) opisuje zjawisko odbicia od powierzchni płaskiej i od powierzchni sferycznej; IX.4) (SP) analizuje bieg promieni wychodzących z punktu w różnych kierunkach, a następnie odbitych […] od zwierciadeł sferycznych; opisuje skupianie promieni w zwierciadle wklęsłym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne położenia punktu P **oraz** poprawna metoda wyprowadzenia wzoru na x w zależności tylko od R i od α, **oraz** podanie prawidłowej postaci wzoru:

$$x = R - \frac{R}{2\cos\alpha}$$

2 pkt – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne i narysowanie promienia odbitego od punktu D pod kątem odbicia równym kątowi padania **oraz** poprawne wyznaczenie i oznaczenie punktu P, **oraz** zauważenie, że $|SP| = |PD|$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie konstrukcyjne i narysowanie promienia odbitego od punktu D pod kątem odbicia równym kątowi padania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

W celu wyznaczenia konstrukcyjnego punktu P, skonstruujemy promień odbity od zwierciadła w punkcie D. Zastosujemy prawo odbicia: *kąt padania jest równy kątowi odbicia*.

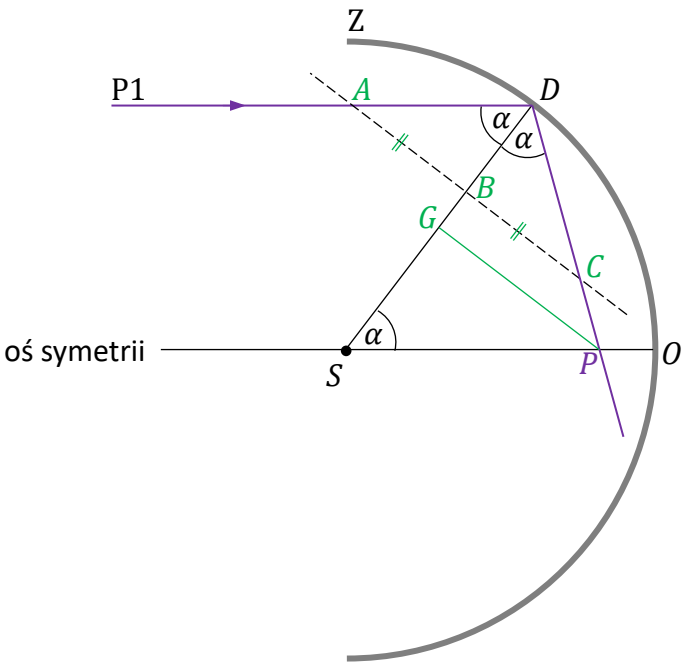
Wykorzystamy linię pomocniczą do odmierzenia równych odcinków, które umożliwią konstrukcję równych kątów. Wprowadzimy punkty pomocnicze A, B, C. Wtedy:

$$|\angle SDA| = |\angle CDS| = \alpha \quad \text{gdy} \quad |AB| = |BC|$$

Punkt przecięcia promienia odbitego z osią symetrii zwierciadła oznaczamy jako P.

Zgodnie z powyższymi warunkami wyznaczymy konstrukcyjnie na rysunku punkt P.

Poniżej konstrukcja:



Następnie wyprowadzimy wzór na $x = |OP|$.

Zauważamy, że $|\angle DSO| = \alpha$ ponieważ $\angle DSO$ i kąt padania $\angle ADS$ są naprzemianległe. Z tego wynika, że trójkąt SPD jest równoramienny. Zatem wysokość opuszczona z wierzchołka P na bok SD dzieli go na dwie równe części, równe połowie promienia krzywizny zwierciadła:

$$|SG| = |GD| = \frac{R}{2}$$

Wyznaczymy długość odcinka SP:

$$\cos\alpha = \frac{|SG|}{|SP|} = \frac{\frac{R}{2}}{|SP|} \qquad \rightarrow \qquad |SP| = \frac{R}{2\cos\alpha}$$

Zauważmy, że:

$$|OP| = |SO| - |SP|$$

Zgodnie z oznaczeniami wielkości w zadaniu otrzymujemy ostatecznie:

$$x = R - \frac{R}{2\cos\alpha}$$

Komentarz do uzyskanego wzoru

Zauważmy, że dla małych kątów padania dla wzoru na x możemy stosować przybliżenie:

$$x \approx \frac{R}{2}$$

Dowód:

$$x = \lim_{\alpha \to 0}\left(R - \frac{R}{2\cos\alpha}\right) = R - \frac{R}{2\lim\limits_{\alpha \to 0}\cos\alpha} = R - \frac{R}{2 \cdot 1} = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

Przykłady:

Rozważmy kąty padania $30°, 20°, 10°, 5°$. Dla każdego z nich obliczymy położenie punktu P:

$$x(30°) = R - \frac{R}{2\cos 30°} \approx 0{,}423R$$

$$x(20°) = R - \frac{R}{2\cos 20°} \approx 0{,}468R$$

$$x(10°) = R - \frac{R}{2\cos 10°} \approx 0{,}492R$$

$$x(5°) = R - \frac{R}{2\cos 5°} \approx 0{,}498R$$

Widzimy, że coraz lepsze przybliżenie ogniskowej zwierciadła sferycznego ($f = \frac{R}{2}$) uzyskujemy dla coraz mniejszych kątów padania.

Podsumowanie:

Ognisko zwierciadła sferycznego jest punktem granicznym dla ciągu punktów P_n, odpowiadających ciągowi kątów padania α_n zbieżnemu do zera.

Zadanie 8.2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Budowanie modeli fizycznych i matematycznych do opisu zjawisk oraz ilustracji praw i zależności fizycznych. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.	Zdający: I.4) przeprowadza obliczenia liczbowe, posługując się kalkulatorem; I.6) tworzy [..] rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk […]; I.7) wyodrębnia z tekstów, […] rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. X.6) stosuje prawo odbicia i prawo załamania fal na granicy dwóch ośrodków; posługuje się pojęciem współczynnika załamania ośrodka; oblicza kąt graniczny.

Zasady oceniania

(dla rozwiązania sposobem 1. lub sposobem 2. lub sposobem 3.)

3 pkt – poprawne ustalenie dalszego biegu promienia P od punktu A **oraz** poprawne narysowanie dalszego biegu promienia P od punktu A.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia kąta granicznego dla przejścia światła z ośrodka 1. do ośrodka 2. **oraz** podanie prawidłowej wartości tego kąta, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90^\circ}=\frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \text{oraz} \quad \alpha_g \approx 55{,}1^\circ$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia sinusa kąta granicznego dla przejścia światła z ośrodka 1. do ośrodka 2. **oraz** podanie prawidłowej wartości sinusa tego kąta, **oraz** stwierdzenie/zapisanie, że kąt padania (lub sinus tego kąta) jest większy od kąta granicznego, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90^\circ}=\frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \text{oraz} \quad \left(\sin\alpha_g \approx 0{,}8197 \quad \text{zatem} \quad \alpha_g < 60^\circ\right)$$

albo

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90^\circ}=\frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \text{oraz} \quad (\sin\alpha_g \approx 0{,}8197) < (\sin 60^\circ \approx 0{,}8660)$$

LUB

– poprawna metoda obliczenia kąta załamania dla przejścia światła z ośrodka 1. do ośrodka 2. **oraz** podanie wartości sinusa kąta załamania większej od jedności, **oraz** stwierdzenie, że nie istnieje taki kąt, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha_2}=\frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \text{oraz} \quad (\sin\alpha_2 > 1 \quad \text{nie istnieje taki kąt } \alpha_2)$$

1 pkt – poprawne zapisanie warunku (z uwzględnieniem wartości współczynników załamania światła), z którego można obliczyć kąt graniczny dla przejścia światła przez granicę ośrodków 1. – 2., np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90^\circ}=\frac{1{,}50}{1{,}83}$$

LUB

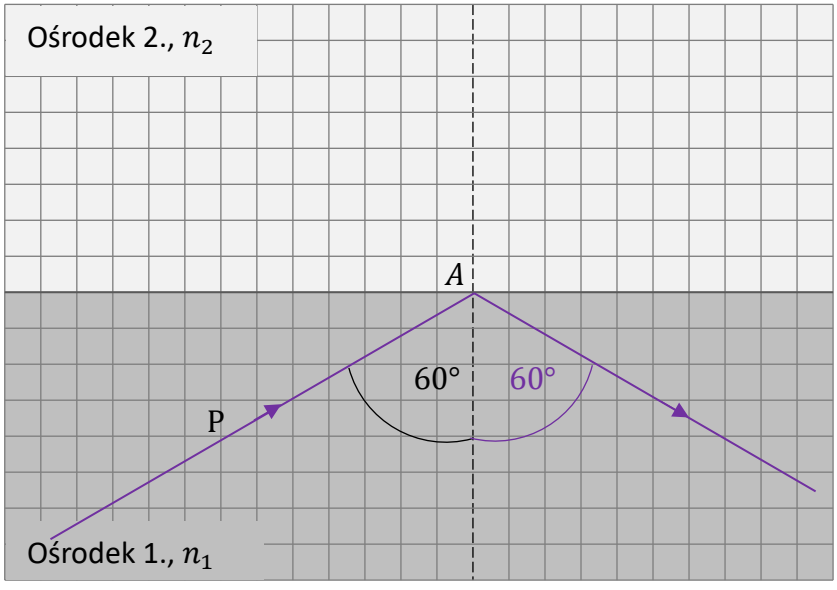
– zapisanie warunku (z uwzględnieniem wartości współczynników załamania światła i miary kąta padania) wynikającego z prawa załamania fali/światła, np. zapisy równoważne poniższym:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha_2}=\frac{1{,}50}{1{,}83}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Dalszy bieg promienia P od punktu A wygląda następująco.



Poniżej wykonamy niezbędne obliczenia, które doprowadziły do ustalenia takiego biegu promienia.

Sposób 1.

Prędkość światła w ośrodku 1. jest mniejsza od prędkości światła w ośrodku 2., ponieważ:

$$\left(n_1 = \frac{c}{v_1}\right) > \left(n_2 = \frac{c}{v_2}\right) \quad \rightarrow \quad v_1 < v_2$$

Z tego wynika, że istnieje kąt graniczny α_g padania dla promienia światła od strony ośrodka 1. Zatem dla kątów padania większych od kąta granicznego nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków 1. – 2. Dla kątów padania mniejszych od kąta granicznego nastąpi załamanie światła (oprócz odbicia niecałkowitego) i przejście do ośrodka 2. Zbadamy, które zjawisko zajdzie.

Wyznaczymy kąt graniczny dla przejścia z ośrodka 1. do ośrodka 2. Zapiszemy warunek (wynikający z prawa załamania fali) dla kąta granicznego w tym przypadku:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90°} = \frac{v_1}{v_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\alpha_g}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin\alpha_g}{1} = \frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_g \approx 0{,}8197$$

Obliczymy kąt graniczny przy użyciu kalkulatora naukowego:

$$\sin\alpha_g \approx 0{,}8197 \quad \text{dla} \quad \alpha_g \approx 55{,}1°$$

Porównamy kąt padania $\alpha = 60°$ z kątem granicznym:

$$\alpha > \alpha_g \quad (60° > 55{,}1°)$$

Z powyższego wynika, że nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków 1. – 2. Zgodnie z tym narysujemy dalszy bieg promienia.

Sposób 2.

Ponieważ $n_1 > n_2$ to istnieje kąt graniczny α_g padania dla promienia światła od strony ośrodka 1. Zatem dla kątów padania większych od kąta granicznego nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków 1. – 2. Dla kątów padania mniejszych od kąta granicznego nastąpi załamanie światła (oprócz odbicia niecałkowitego) i przejście do ośrodka 2. Zbadamy, które zjawisko zajdzie.

Wyznaczymy sinus kąta granicznego dla przejścia z ośrodka 1. do ośrodka 2. Zapiszemy warunek (wynikający z prawa załamania fali) dla kąta granicznego w tym przypadku:

$$\frac{\sin\alpha_g}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\alpha_g}{1} = \frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_g \approx 0{,}8197$$

Porównamy sinus kąta padania $\alpha = 60°$ z sinusem kąta granicznego:

$$\left(\sin 60° \approx 0{,}8660 \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha_g \approx 0{,}8197\right) \quad \text{zatem} \quad \sin 60° > \sin\alpha_g$$

Ponieważ w przedziale od $0°$ do $90°$ sinus jest funkcją rosnącą, to:

$$\sin 60° > \sin\alpha_g \quad \rightarrow \quad (\alpha = 60°) > \alpha_g$$

To oznacza, że nastąpi całkowite odbicie od granicy ośrodków 1. – 2.
Zgodnie z tym narysujemy dalszy bieg promienia.

Sposób 3.

Zapiszemy warunek wynikający z prawa załamania fali na granicy ośrodków 1. – 2.
Z tego warunku wyznaczymy sinus kąta załamania.

Kąt padania promienia od strony ośrodka 1. oznaczono w zadaniu jako α, a kąt załamania (jeśli istnieje) promienia w ośrodku 2. oznaczymy jako α_2. Zatem:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin 60°}{\sin\alpha_2} = \frac{1{,}50}{1{,}83} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}8660}{\sin\alpha_2} \approx 0{,}8197$$

Zatem:

$$\sin\alpha_2 \approx 1{,}06 \quad \text{czyli} \quad \sin\alpha_2 > 1 \quad \text{NIEMOŻLIWE}$$

Ponieważ nie istnieje kąt, dla którego sinus jest większy od jedynki, to nie istnieje w tym przypadku kąt α_2 załamania promienia w ośrodku 2. Z tego wynika, że promień światła nie wniknie do ośrodka 2., tylko całkowicie odbije się od granicy ośrodków 1. – 2.